

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMETRIE partie1
- ✓ TRIGONOMETRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

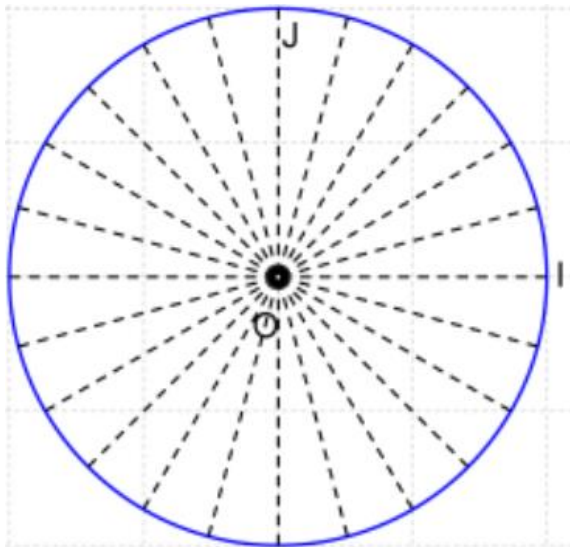
Exercice01 : 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 75° .

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$ rad.

Solution : 1) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{75}{180}$ donc : $\alpha = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha \times 180 = \beta \times \pi$ donc : $\beta = \frac{\alpha \times 180}{\pi} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 150^\circ$

Exercice02 : Convertir en degré et Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé : $A(\pi)$; $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $D\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $H\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$



Solution : $A\left(\pi \text{ rad} = \frac{180}{3} = 60^\circ\right)$;

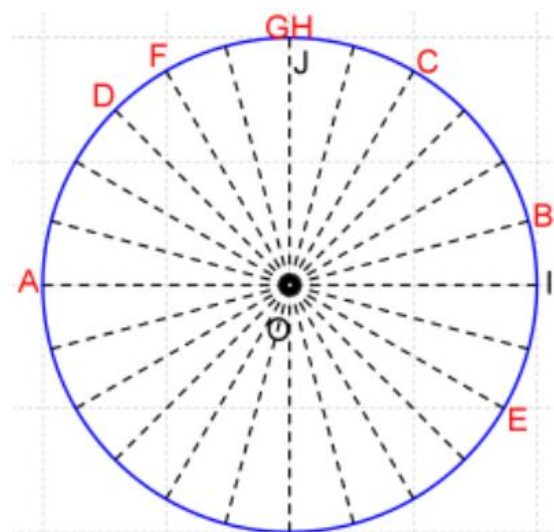
$B\left(\frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{180}{12} = 15^\circ\right)$; $C\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{180}{3} = 60^\circ\right)$;

$D\left(\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3 \times 180}{4} = 135^\circ\right)$;

$E\left(-\frac{\pi}{6} \text{ rad} = -\frac{180}{12} = -30^\circ\right)$;

$F\left(\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ\right)$

; $G\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{180}{2} = 90^\circ\right)$



Exercice03 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses

suivantes : a) -2024π b) $\frac{2019\pi}{4}$ c) $-\frac{2021\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right); B\left(\frac{3\pi}{2}\right); C(-2024\pi); D\left(\frac{2019\pi}{4}\right); E\left(-\frac{2021\pi}{6}\right)$$

Solution : 1) a) $-2024\pi = 0 + 2(-1012)\pi$ et $0 \in]-\pi; \pi]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à -2024π est $\alpha = 0$

b) $x = \frac{2019\pi}{4}$ *Méthode1 :* Soit α l'abscisse curviligne principale associée à x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{2019\pi}{4} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{2019\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{2019\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi - \frac{2019\pi}{4}$

Équivalent à : $-\frac{2023\pi}{4} < 2k\pi \leq -\frac{2015\pi}{4}$

Équivalent à : $-\frac{2023}{4} < 2k \leq -\frac{2015}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{2023}{8} < k \leq -\frac{2015}{8}$

$-252,8 < k \leq -251,875$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -252$ et donc $\alpha = \frac{2019\pi}{4} + 2k\pi = \frac{2019\pi}{4} + 2(-252)\pi = \frac{2019\pi - 2016\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2019\pi}{4}$ est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Méthode2 : On a $x = \frac{2019\pi}{4} = \frac{2016\pi + 3\pi}{4} = 336\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 168 \times 2\pi$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$ donc

l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2019\pi}{4}$ est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

c) $-\frac{2021\pi}{6}$: *Méthode1 :*

Soit α l'abscisse curviligne principale associée à x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi + \frac{2021\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi + \frac{2021\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{2015\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{2027\pi}{6}$ Équivalent à : $\frac{2015}{6} < 2k \leq \frac{2027}{6}$

Équivalent à : $\frac{2015}{12} < k \leq \frac{2027}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $167,9.. < k \leq 168,9..$ et $k \in \mathbb{Z}$

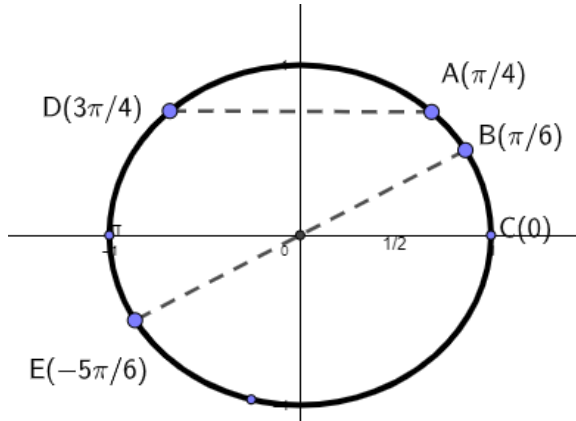
Alors $k = 168$ et donc $\alpha = -\frac{2021\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{2021\pi}{6} + 2(168)\pi = \frac{-2021 + 2016\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{2021\pi}{6}$ est : $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

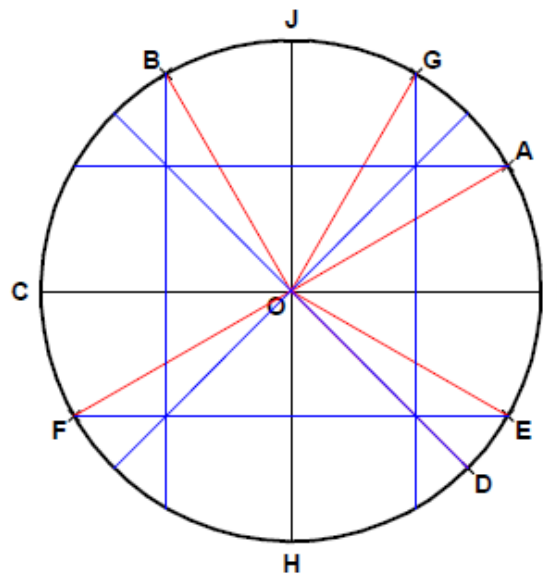
Méthode2 : On a $-\frac{2021\pi}{6} = \frac{-2016\pi - 5\pi}{6} = 336\pi - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times 168\pi$ et $-\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à : $-\frac{2021\pi}{6}$ est : $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :



Exercice04 : Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer un abscisse curviligne associées aux points : A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J



Solution : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $C(\pi)$; $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $I(0)$; $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice05 : Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \in]-\pi ; \pi] \text{ Équivalent à : } -\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi$$

$$\text{Équivalent à : } -1 < \frac{1}{6} + \frac{k}{3} \leq 1$$

$$\text{Équivalent à : } -1 - \frac{1}{6} < \frac{k}{3} \leq 1 - \frac{1}{6}$$

$$\text{Équivalent à : } -\frac{7}{6} < \frac{k}{3} \leq \frac{5}{6} \text{ c'est-à-dire : } -\frac{7}{2} < k \leq \frac{5}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Par suite : $k = -3$ ou $k = -2$ ou $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$

Donc : le nombre de points est 6 :

Si $k = 0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{6} + \frac{0 \times \pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$

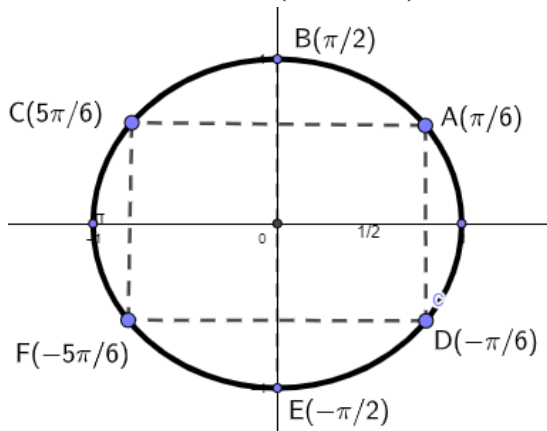
Si $k = 1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1 \times \pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k = 2$ alors : $C\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2 \times \pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Si $k = -1$ alors : $D\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Si $k = -2$ alors : $E\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2 \times \pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

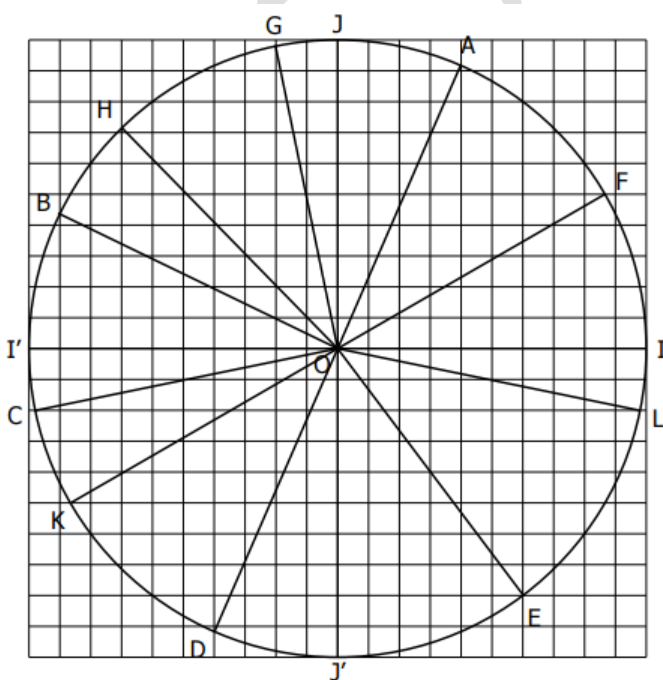
Si $k = -3$ alors : $F\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3 \times \pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



Exercice06 : Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique ($OI=1$) les cosinus et sinus des angles Suivants :

$\cos(IOA)$; $\cos(IOB)$; $\sin(IOC)$; $\cos(IOD)$; $\sin(IOE)$; $\sin(IOL)$; $\sin(IOF)$; $\cos(IOJ)$;

$\cos(IOG)$; $\cos(IOH)$; $\sin(IOI')$; $\sin(IOK)$; $\sin(IOJ')$; $\cos(IOI')$



Solution : $\cos(IOA) = 0,4$; $\cos(IOB) = -0,9$; $\sin(IOC) = -0,2$; $\cos(IOD) = -0,4$;
 $\sin(IOE) = -0,8$; $\sin(IOL) = -0,2$; $\sin(IOF) = 0,5$; $\cos(IOJ) = 0$; $\cos(IOG) = -0,2$;
 $\cos(IOH) = -0,7$; $\sin(IOI') = 0$; $\sin(IOK) = -0,5$; $\sin(IOJ') = -1$; $\cos(IOI') = -1$

Exercice07 : Dans chacun des cas suivants déterminer $\cos x$

1) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin x = \frac{1}{4}$ 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin x = -0.6$ 3) $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ et $\sin x = -\frac{2}{3}$

Solution :1) on a $\sin x = \frac{1}{4}$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc : $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{15}{16}$ signifie que : $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc : $\cos x \leq 0$ donc : $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

2) on a $\sin x = -0.6$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - (-0.6)^2 = 1 - 0.36$

Donc : $\cos^2 x = 0.64$ donc : $\cos x = 0.8$ ou $\cos x = -0.8$

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\cos x \geq 0$ par suite : $\cos x = 0.8$

3) On a $\sin x = \frac{1}{4}$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{15}{16}$ donc : $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ donc : $\cos x \geq 0$ donc : $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice08 : Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et sachant que : $\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

1) Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

2) Calculer : $A = \sin(5\pi - x) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan(3\pi - x)$

Solution : 1) On a : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

Par suite : $\cos x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\cos x > 0$ donc : $\boxed{\cos x = \frac{2}{3}}$

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc : $\sin x = \cos x \tan x$

Donc : $\sin x = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2) Calculons : $A = \sin\left(5\pi - x\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan(3\pi - x)$

$A = \sin\left(5\pi - x\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan(3\pi - x)$

$A = \sin\left(4\pi + \pi - x\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi + \pi}{2}\right) - \tan(-x)$ Car $\tan(k\pi + X) = \tan X$

$A = \sin\left(4\pi + \pi - x\right) + \cos\left(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \tan x$ Car $\tan(-X) = -\tan X$

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \tan x$ Car $\cos(2k\pi + X) = \cos X$ et $\sin(2k\pi + X) = \sin X$

$A = \sin x - \sin x + \tan x$ car : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Donc : $A = \tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice09 : On donne : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

1) Calculer la valeur exacte de : $\sin \frac{\pi}{12}$

2) A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire: $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Solution : 1) On a : $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1$

Donc : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12}$ c'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

Donc : $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ or $\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin \frac{\pi}{12} > 0$

La seule solution possible est : $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

2) On a : $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$

$$\text{Donc : } \cos \frac{11\pi}{12} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{On a : } \sin \frac{11\pi}{12} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$$

Exercice10 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x) \quad B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x)$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Solution : $A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$

$$A = \sin(x) \times \sin(x) - \cos x \times (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x + \sin x}{-\cos x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\tan x$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$C = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$D = \sin(10\pi + \pi - x) + \cos(4\pi + \pi + x) + \cos(2 \times 7\pi - x)$$

$$D = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(-x)$$

$$D = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = \sin(x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) = -\tan(x) + \tan(x) = 0$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc : } \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

On a $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$ donc : $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$ donc : $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Et on a $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$$H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2$$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$K = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) + \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$$

Donc : $K = 1 + 1 = 2$

Exercice11 : On pose : $A(x) = \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)$

Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \left(\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \quad A\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Exercice12 : Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

$$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

$$\text{Donc : } B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

$$\text{On remarque que : } \frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi \text{ donc : } \frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12} \text{ Et on a : } \frac{3\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{9\pi}{12} = \pi - \frac{3\pi}{12}$$

$$\text{et } \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Donc on a : } C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\text{Et on remarque que : } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

$$C = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) + 1 = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{12}\right)\right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Exercice13 : Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$1) (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2 \quad B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$2) (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$$

Solution :1)

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x$$

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2 \times 1 = 2$$

$$2)(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x \sin x - \sin^2 x \\ = 4 \cos x \sin x$$

Exercice14 : simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \quad B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$C = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x \quad D = \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x$$

Solution : $A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$$A = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x \quad A = 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2 \times 1 = 2$$

$$B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$B = \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^2 x$$

$$\text{Donc : } B = \cos^2 x (\cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin^2 x - 1)$$

$$\text{On a : } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{Donc : } \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x \text{ et } \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$$

$$B = \cos^2 x \times (-\sin^2 x) - \sin^2 x (-\cos^2 x)$$

$$B = -\cos^2 x \times \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$C = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 + 2 \cos^2 x \quad C = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos^2 x$$

$$\text{Donc : } C = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$D = \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x \quad D = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x \quad D = 2 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x$$

$$D = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2 \times 1 = 2$$

Exercice15 : 1) Simplifier l'expression suivante : $A(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 6\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) 2)$

Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(4\pi - x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x = 3$

Solution :1) $A(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 6\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

$$A(x) = \cos^2 x - \cos(-x) + \cos(2\pi + \pi + x) + \sin\left(x - 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad A(x) = \cos^2 x - \cos(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A(x) = \cos^2 x - \cos x - \cos x + \cos x = \cos^2 x - \cos x$$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x) = \cos^2 x - \cos x$

$$\text{Donc : } A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Donc : } A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$$= \cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos^2\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

3)a) Calcul en fonction de : $\sin x$ le nombre : $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(4\pi - x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(-x)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$$

$$A = \frac{\cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) \cos x}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Donc : $A = \frac{\sin^2 x \cos x}{-\cos x} = -\sin^2 x$

b) Dédution de la valeur de A si $\tan x = 3$

On sait que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x \tan^2 x = \sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \tan^2 x$

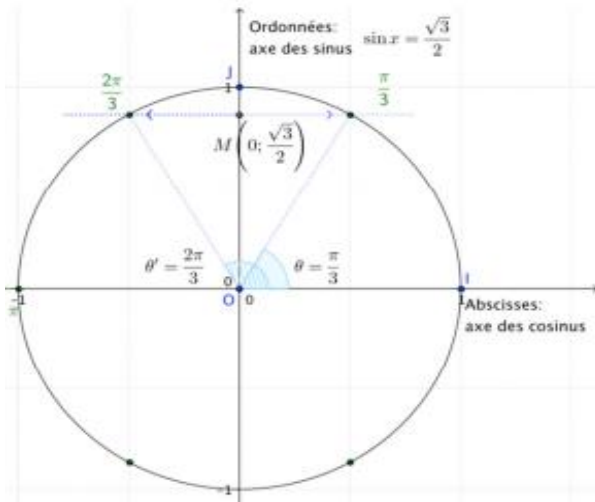
Et puisque : $\tan x = 3$ alors :

$$A = -\sin^2 x = -\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{9}{1 + 9} = -\frac{9}{10}$$

Exercice16 : Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :

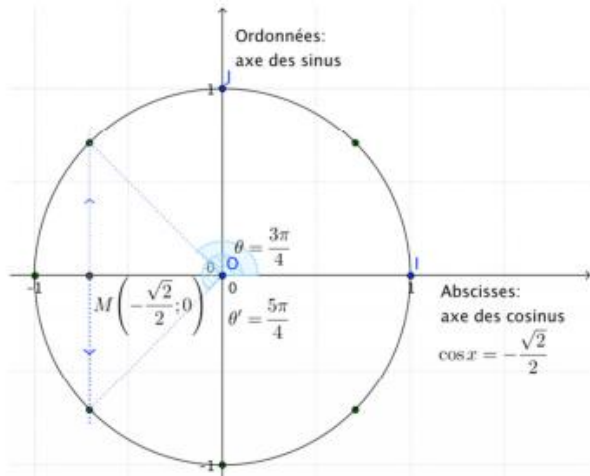


Donc $S_{[0,2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

Exercice17 : Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation suivantes : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

On utilise le cercle trigonométrique :



Donc $S_{[0,2\pi]} = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

Exercice18 : Soit l'équation : $-\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Résoudre l'équation dans l'intervalle $[0, 4\pi]$

Solution : On isole l'expression trigonométrique.

$-2\sin x - \sqrt{2} = 0$ Équivaut à : $-2\sin x = \sqrt{2}$ c'est-à-dire : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (on utilise le tableau)

Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (on peut aussi utiliser le cercle trigonométrique)

Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$

On s'intéresse maintenant aux solutions situées dans l'intervalle $[0, 4\pi]$

Pour obtenir toutes les solutions demandées, on remplace k par 0 et par 1:

Donc L'ensemble des solutions de l'équation dans $[0, 4\pi]$ est donc $S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right\}$

(On peut aussi faire des encadrements pour trouver toutes les solutions demandées)

Exercice19 : Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\cos 2x = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi; 5\pi]$

2) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; 2\pi]$

3) $\cos 3x = -\cos x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; \pi]$

4) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi; 6\pi]$

5) $\sin(3x) = \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Solution : 1) On a : $\cos 2x = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos(4\pi)$

Équivaut à : $\cos 2x = \cos(0)$ Équivaut à : $2x = 0 + 2k\pi$ Équivaut à : $x = k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Pour la résolution dans : $[\pi; 5\pi]$ on va encadrer :

Encadrement de $k\pi$: $\pi \leq k\pi \leq 5\pi$ Équivaut à : $1 \leq k \leq 5$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ par suite : $x_1 = \pi$; $x_2 = 2\pi$; $x_3 = 3\pi$; $x_4 = 4\pi$; $x_5 = 5\pi$

Donc : $S_{[\pi; 5\pi]} = \{\pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi\}$

2) on a : $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{13\pi}{15} + 2k\pi$ ou $x = \frac{22\pi}{15} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{13\pi}{15} + 2k\pi; \frac{22\pi}{15} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $[-2\pi; 2\pi]$ on va encadrer :

• Encadrement de $\frac{13\pi}{15} + 2k\pi$:

$-2\pi \leq \frac{13\pi}{15} + 2k\pi \leq 2\pi$ Équivaut à : $-\frac{43\pi}{15} \leq 2k\pi \leq \frac{17\pi}{15}$ $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{43}{30} \leq k \leq \frac{17}{30}$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne : $x_1 = -\frac{17\pi}{15}$; $x_2 = \frac{13\pi}{15}$

• Encadrement de $\frac{22\pi}{15} + 2k\pi$:

$$-2\pi \leq \frac{22\pi}{15} + 2k\pi \leq 2\pi \quad \text{Équivaut à : } \frac{-52}{30} \leq k \leq \frac{8}{30} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne : $x_3 = -\frac{8\pi}{15}$; $x_4 = \frac{22\pi}{15}$

$$\text{Finalement : } S_{[-2\pi; 2\pi]} = \left\{ -\frac{17\pi}{15}; \frac{13\pi}{15}; -\frac{8\pi}{15}; \frac{22\pi}{15} \right\}$$

3) on a : $\cos 3x = -\cos x$ Équivaut à : $\cos 3x = \cos(\pi - x)$

$$\text{Équivaut à : } 3x = \pi - x + 2k\pi \text{ ou } 3x = -(\pi - x) + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } 4x = \pi + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc les solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \text{ sont : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Pour la résolution dans : $[-2\pi; \pi]$ on va encadrer :

• Encadrement de $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi \quad \text{Équivaut à : } \frac{-9\pi}{4} \leq \frac{k\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ c'est-à-dire : } \frac{-9}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\} \text{ ce qui donne : } x_1 = -\frac{7\pi}{4}; x_2 = -\frac{5\pi}{4}; x_3 = -\frac{3\pi}{4}; x_4 = -\frac{\pi}{4}; x_5 = \frac{\pi}{4}; x_6 = \frac{3\pi}{4}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \quad \text{Équivaut à : } -\frac{3\pi}{2} \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \text{ c'est-à-dire : } \frac{-3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } k \in \{-1; 0; 1\} \text{ ce qui donne : } x_7 = -\frac{3\pi}{2}; x_8 = -\frac{\pi}{2}; x_9 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Finalement : } S_{[-2\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

4) on va résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi; 6\pi]$: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x \quad \text{Équivaut à : } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$$

$$\text{Équivaut à : } 2x + \frac{\pi}{4} = -x + 2k\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - (-x) + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{c'est-à-dire : } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{Donc les solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \text{ sont : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$:

$$4\pi \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq 6\pi \quad \text{Équivaut à : } \frac{49\pi}{12} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{73\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Équivaut à : } \frac{49}{8} \leq k \leq \frac{73}{8} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } k \in \{7; 8; 9\} \text{ ce qui donne : } x_1 = \frac{55\pi}{12} ; x_2 = \frac{63\pi}{12} ; x_3 = \frac{71\pi}{12}$$

• Encadrement de $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$:

$$4\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 6\pi \quad \text{Équivaut à : } \frac{13\pi}{4} \leq 2k\pi \leq \frac{21\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est-à-dire : } \frac{13}{8} \leq k \leq \frac{21}{8} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } k = 2 \text{ ce qui donne : } x_4 = \frac{19\pi}{4}$$

$$\text{Finalement : } S_{[4\pi; 6\pi]} = \left\{ \frac{55\pi}{12}; \frac{63\pi}{12}; \frac{71\pi}{12}; \frac{19\pi}{4} \right\}$$

5) $\sin(3x) = \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

$$\sin(3x) = \cos(2x) \quad \text{Équivaut à : } \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x)$$

$$\text{Équivaut à : } \frac{\pi}{2} - 3x = 2x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 3x = -2x + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{c'est-à-dire : } x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Donc les solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \text{ sont : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice20 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Et puisque : } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ alors : } x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x \leq \frac{1}{2} \quad \text{Équivaut à : } \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$

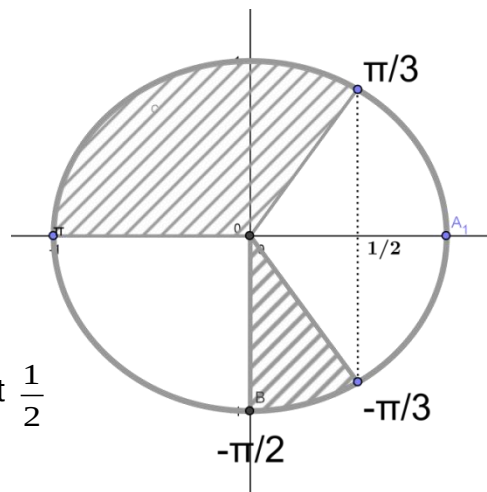
En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{1}{2}$

$$\text{Dans } \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ On trouve que : } S = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Exercice21 : Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

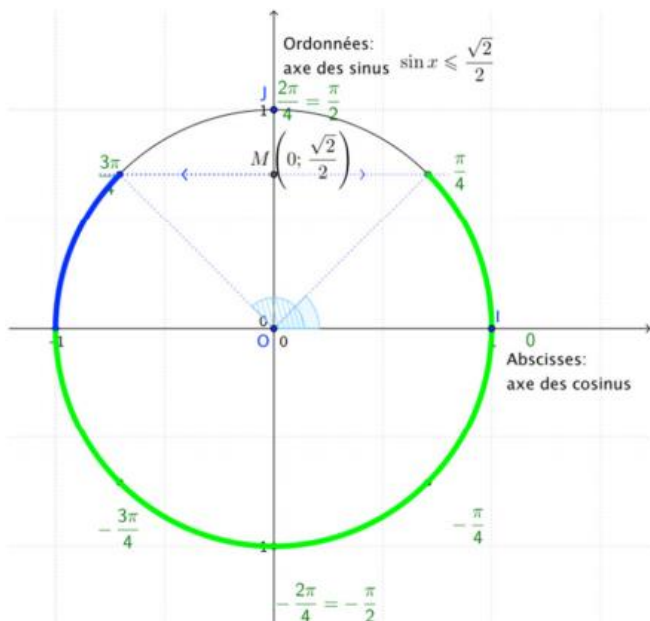
$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$



Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi; \pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$



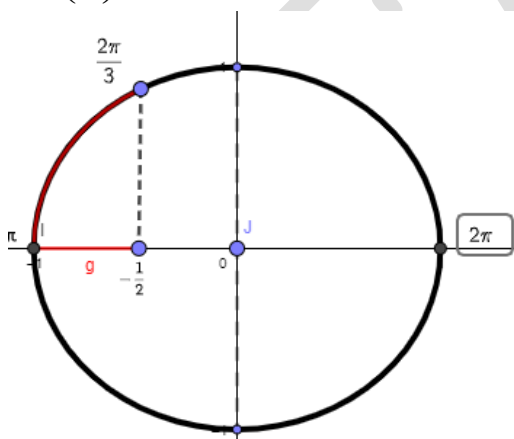
Donc : $S =]-\pi; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \pi]$

Exercice22 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$

Solution :

Soit : $x \in [0; 2\pi]$ donc : $\frac{x}{2} \in [0; \pi]$

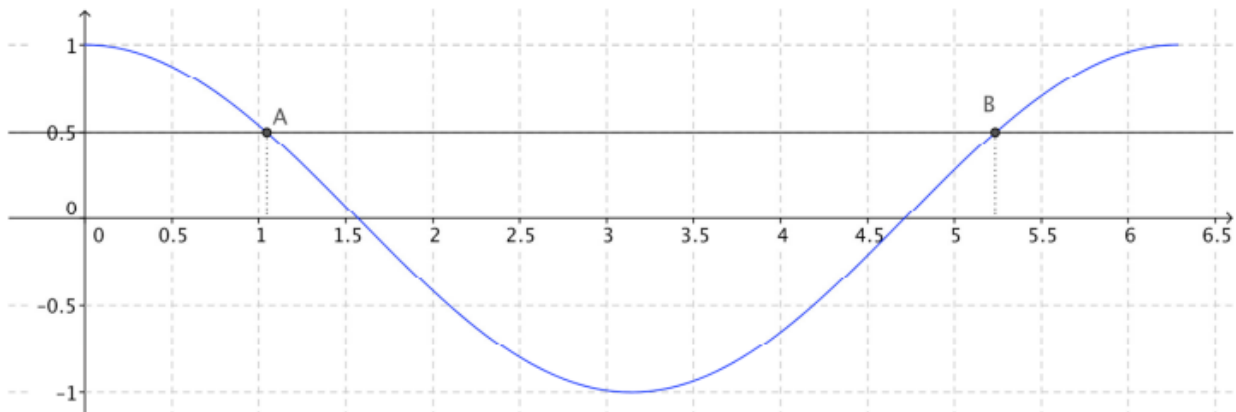
$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{x}{2} \leq \pi$ Signifie que : $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$



Donc : $S = \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$

Exercice23 : On a tracé sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$



Solution : Graphiquement, on lit que les solutions sont :

$$x_1 \approx 1,05 \text{ (soit } x_1 = \frac{\pi}{3} \text{)} \quad \text{et} \quad x_2 \approx 5,25 \text{ (soit } x_2 = \frac{5\pi}{3} \text{)}$$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*

