

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMETRIE partie1
- ✓ TRIGONOMETRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice01 : Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=3cm$ et tel que :

$$\alpha = (\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Solution : on a : $L = R \times \alpha = 3 \times \frac{\pi}{3} \text{ cm} = \pi \text{ cm}$

Exercice02 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

1) 2025π 2) $\frac{19\pi}{6}$ 3) $-\frac{2023\pi}{3}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$$A(0) ; B\left(\frac{\pi}{2}\right) ; C(2025\pi) ; D\left(\frac{19\pi}{6}\right) ; E\left(-\frac{2023\pi}{3}\right)$$

Solution : 1) $x = 2025\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = 2025\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < 2025\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi - 2025\pi < 2k\pi \leq \pi - 2025\pi$

Équivalent à : $-2026\pi < 2k\pi \leq -2024\pi$

Équivalent à : $-2026 < 2k \leq -2024$

Équivalent à : $-1013 < k \leq -1012$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -1012$ et donc $\alpha = 2025\pi + 2k\pi = 2025\pi + 2(-1012)\pi = 2025\pi - 2024\pi = \pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = 2025\pi$ est $\alpha = \pi$

2) $x = \frac{19\pi}{6}$

Méthode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{19\pi}{6} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{19\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{19\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi - \frac{19\pi}{6}$

Équivalent à : $-\frac{25\pi}{6} < 2k\pi \leq -\frac{13\pi}{6}$

Équivalent à : $-\frac{25}{6} < 2k \leq -\frac{13}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{25}{12} < k \leq -\frac{13}{12}$

$-2.08 < k \leq -1.08$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -2$ et donc $\alpha = \frac{19\pi}{6} + 2k\pi = \frac{19\pi}{6} + 2(-2)\pi = \frac{19\pi - 24\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{19\pi}{6}$ est $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

Méthode2 : On a $\frac{19\pi}{6} = \frac{24\pi - 5\pi}{6} = 4\pi - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times 2\pi$ et $-\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisse curviligne principale associée à $x = \frac{19\pi}{6}$ est $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

3) $-\frac{2023\pi}{3}$: Méthode1 :

Soit α l'abscisse curviligne principale associée à x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = -\frac{2023\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\frac{2023\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi + \frac{2023\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{2023\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{2020\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{2026\pi}{3}$ Équivalent à : $\frac{2020}{3} < 2k \leq \frac{2026}{3}$

Équivalent à : $\frac{1010}{3} < k \leq \frac{1013}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $336.66 < k \leq 337.66$ et $k \in \mathbb{Z}$

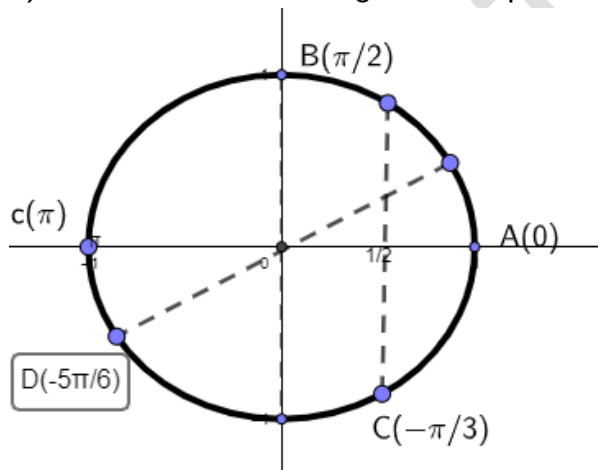
Alors $k = 337$ et donc $\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{2023\pi}{3} + 2(337)\pi = \frac{-2023 + 2022\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{2023\pi}{3}$ est : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Méthode2 : On a $\frac{-2023\pi}{3} = \frac{-2022\pi - \pi}{3} = 674\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 337\pi$ et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{2023\pi}{3}$ est : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :



Exercice03 : Associer entre eux les nombres qui correspondent au même point du cercle :

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	6π	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{14\pi}{3}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
14π	$-\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	3π	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Solution : $3\pi = \pi + 1 \times 2\pi$ Egalités à 2π près

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi + 4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1 \times 2\pi \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{-5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{7\pi}{4} - 2\pi = \frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

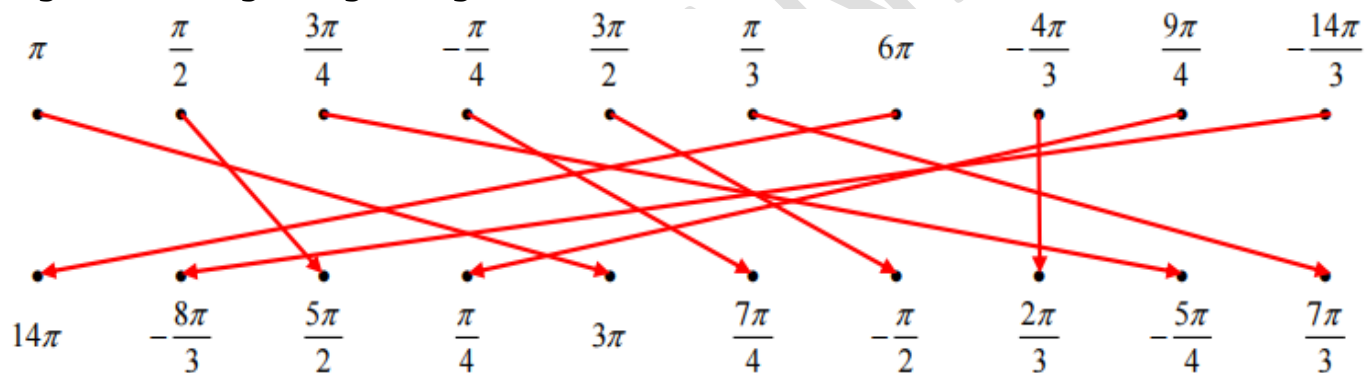
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

$$6\pi + 8\pi = 14\pi = 7 \times 2\pi \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{-4\pi}{3} + 2\pi = \frac{-4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$

$$\frac{-14\pi}{3} + 2\pi = \frac{-14\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3} \text{ Egalités à } 2\pi \text{ près}$$



Exercice04 : Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I Les points d'abscisses curvilignes : $k \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k \left(k \frac{\pi}{2} \right)$

$$k \frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi] \text{ Équivalent à : } -\pi < k \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

$$\text{Équivalent à : } -1 < \frac{k}{2} \leq 1$$

$$\text{Équivalent à : } -2 < k \leq 2 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Par suite : $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$

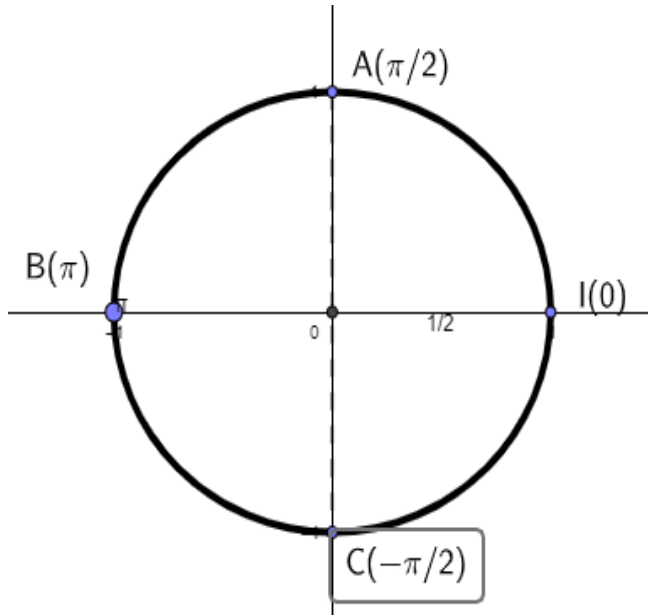
Donc : le nombre de points est 4 :

$$\text{Si } k = 0 \text{ alors : } I \left(\frac{0 \times \pi}{2} \right) \text{ c'est-à-dire : } I(0)$$

$$\text{Si } k = 1 \text{ alors : } A \left(\frac{1 \times \pi}{2} \right) \text{ c'est-à-dire : } A \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

Si $k = 2$ alors : $B\left(\frac{2 \times \pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $B(\pi)$

Si $k = -1$ alors : $C\left(-1 \frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(-\frac{\pi}{2}\right)$



Exercice05 : Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associées au même point que

$M\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ Sur le cercle trigonométrique : $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{-49\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{-241\pi}{12}$; $\frac{-37\pi}{12}$; $\frac{313\pi}{12}$

Solution : $\frac{47\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{48\pi}{12} = 4\pi$ ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\frac{-49\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-48\pi}{12} = -4\pi$: ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{12\pi}{12} = \pi$: ce qui correspond à un demi-tour.

$\frac{-241\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-240\pi}{12} = -20\pi$: ce qui correspond à un écart de 10 tours.

$\frac{-37\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-36\pi}{12} = -3\pi$: ce qui correspond à un tour et demi.

$\frac{313\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{312\pi}{12} = 26\pi$: ce qui correspond à un écart de 13 tours.

Finalement $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{-49\pi}{12}$; $\frac{-241\pi}{12}$; $\frac{313\pi}{12}$ sont associés au même point que M

Exercice06: A ; B ; C et D sont quatre points du plan.

Démontrer l'égalité : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \equiv 0[2\pi]$

Solution : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})[2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AB})[2\pi]$

Car : $(\overrightarrow{-u}; \overrightarrow{-v}) \equiv (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})[2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB})[2\pi]$ Grâce à la relation de Chasles

$\equiv 0[2\pi]$

Exercice07 : On considère un entier relatif n (il peut être positif ou négatif). Déterminer éventuellement en fonction de n , le cosinus et le sinus des réels :

$$2n\pi \quad ; \quad (2n+1)\pi \quad ; \quad n\pi \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

Solution :1) $\cos(2n\pi) = \cos(2\pi n) = \cos(2\pi n + 0) = \cos(0) = 1$

$$\sin(2n\pi) = \sin(2\pi n) = \sin(2\pi n + 0) = \sin(0) = 0$$

$$\cos((2n+1)\pi) = \cos(2\pi n + \pi) = \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin((2n+1)\pi) = \sin(2\pi n + \pi) = \sin(2\pi n + \pi) = \sin(\pi) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(n\pi) = 1 \dots \text{si } n \text{ pair} \\ \cos(n\pi) = -1 \dots \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{à l'aide des deux calculs précédents et } \sin(n\pi) = 0$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Exercice08 : 1) Sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

2) Sachant que : $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ et $\tan x = 2\sqrt{3}$; calculer : $\cos x$ et $\sin x$

3) Sachant que : $\cos x > \sin x > 0$ et ; calculer : $\cos x + \sin x$ et $\cos x - \sin x$
Et en déduire $\cos x$ et $\sin x$

Solution :

• On a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{9}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{7}{9}$ par suite : $\cos x = \sqrt{\frac{7}{9}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{7}{9}}$

Or $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ donc : $\cos x < 0$ donc : $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ et par suite : $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$

2) On a : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x = 2\sqrt{3}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + 12}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{13}$ donc : $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

Or : $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ donc $\cos x < 0$ par suite : $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

On a : $\tan x \cdot \cos x = \sin x$ donc : $\sin x = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$ et par suite : $\sin x = -\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3) On a : $\cos x > \sin x > 0$ et $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a : $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

Signifie que : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Signifie que : $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ (1) car $\cos x + \sin x > 0$

Et on a : $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

Donc : $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Donc : $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ (2) car $\cos x - \sin x > 0$

(1)+(2) Donne : $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et (1)-(2) Donne : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice09 : On donne : $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1) Calculer la valeur exacte de : $\sin \frac{\pi}{5}$

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels : $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$

Solution : 1) On a : $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1$

Donc : $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}$ c'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{8}$

C'est à dire : $\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

Donc : $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sin \frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ or $\frac{\pi}{5} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin \frac{\pi}{5} > 0$

La seule solution possible est : $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) On a : $\frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi - \pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$

Donc : $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a : $\frac{9\pi}{5} = \frac{4\pi + 5\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} + \frac{5\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} + \pi$

Donc : $\sin \frac{9\pi}{5} = \sin\left(\frac{4\pi}{5} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice10 : Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

Solution : $A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$

$$B = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $B = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$

Exercice11 : Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les réels suivants :

$$A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) ; B = \sin(x + 100\pi) \quad C = \cos\left(\frac{2020\pi}{2} + x\right) \quad D = \sin\left(\frac{2021\pi}{2} + x\right)$$

$$E = \sin(x - 78\pi) ; F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$$

$$G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x)$$

Solution : $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$$B = \sin(x + 100\pi) = \sin(x + 2 \times 50\pi) = \sin x$$

$$C = \cos\left(\frac{2020\pi}{2} + x\right) = \cos(1010\pi + x) = \cos(2 \times 505\pi + x) = \cos x$$

$$D = \sin\left(\frac{2021\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2020\pi + \pi}{2} + x\right) = \sin\left(1010\pi + \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$E = \sin(x - 78\pi) = \sin(x - 2 \times 39\pi) = \sin x$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$$

$$F = \sin x + 4\sin\left(-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 5 \times (-\sin x)$$

$$F = \sin x - 4\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 5\sin x = 6\sin x - 4\cos x$$

$$G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x)$$

$$G = \cos x + 2\cos x - 5\sin x = 3\cos x - 5\sin x$$

Exercice12 : Simplifier les expressions suivantes :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Solution : $G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi$ donc : $\frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi$ donc : $\frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$ donc : $\frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$

Donc : $G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

Donc : $G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

On a $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$ donc : $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$ donc : $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

Donc : $H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Et on a $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

Donc $H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2$

$$K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

$$\text{Donc : } K = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\text{Donc : } K = \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) + \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$$

$$\text{Donc : } K = 1 + 1 = 2$$

Exercice13 : Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; On pose : $A = \sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$

1) Montrer que : $A = \cos^2 x$

2) Si $A = \frac{1}{3}$ calculer : $\tan x$

Solution : 1) Montrons que : $A = \cos^2 x$

On a : $A = \sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$ et on sait que : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ c'est-à-dire : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\text{Donc : } A = 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1$$

$$\text{Donc : } A = 1 + \cos^2 x - 1 = \cos^2 x$$

2) Si $A = \frac{1}{3}$ calculons : $\tan x$

$$\text{On a : } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ par suite : } \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Donc : } A = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \text{ c'est-à-dire : } \frac{1}{3} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Donc : } 1 + \tan^2 x = 3 \text{ c'est-à-dire : } \tan^2 x = 2$$

$$\text{Donc : } \tan x = \sqrt{2} \text{ ou } \tan x = -\sqrt{2} \text{ mais on a : } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ c'est-à-dire : } \tan x \leq 0$$

$$\text{Par suite : } \tan x = -\sqrt{2}$$

Exercice14 : Simplifier les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

$$I = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} \text{ si } x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$J = \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} + \frac{2}{\sin x + \cos x + 1} \text{ si } x \neq \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$K = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x$$

$$X = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\text{Solution : } I = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x}$$

$$I = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} + \frac{\sin x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$I = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$I = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} + \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$I = \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$I = \frac{\sin x(1 - \sin x) + \cos x(1 - \cos x) + 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\cos x \sin x}$$

$$I = \frac{\sin x - \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\cos x \sin x}$$

$$I = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 + \sin x \cos x}{\cos x \sin x}$$

$$I = \frac{-1 + 1 + \sin x \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos x \sin x} = 1$$

$$J = \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} + \frac{2}{\sin x + \cos x + 1} = \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + \cos x + 1) + 2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x (\sin x + \cos x + 1)}$$

Et après développement et Réduction on trouve : $J = 1$

$$K = \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x$$

$$K = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x$$

$$K = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x$$

$$K = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin^2 x$$

$$K = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$X = \cos^6 x + \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$X = (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 + 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Et puisque : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$$\text{Alors : } X = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$$

Exercice15 : Calculer AC dans ce triangle :

Solution D'après la loi des sinus, On obtient : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$$\text{Donc : } \frac{\sin 67^\circ}{b} = \frac{\sin 33^\circ}{5}$$

$$\text{Donc : } b \sin 33^\circ = 5 \sin 67^\circ \text{ c'est-à-dire : } b = \frac{5 \sin 67^\circ}{\sin 33^\circ}$$

Par suite : $AC \approx 8,45$

Exercice16 : Calculer le périmètre et la surface d'un parallélogramme ABCD tel que :

$$BC = 3\text{cm} \text{ et } \angle ABC = \frac{2\pi}{3} \text{ et } AB = 4\text{cm}$$

Solution : Le périmètre du parallélogramme ABCD est :

$$P = 2(AB + AD) = 2(4 + 3) = 14\text{cm}$$

La surface du parallélogramme ABCD est : $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$

Et on a : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin B$ donc :

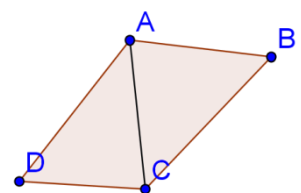
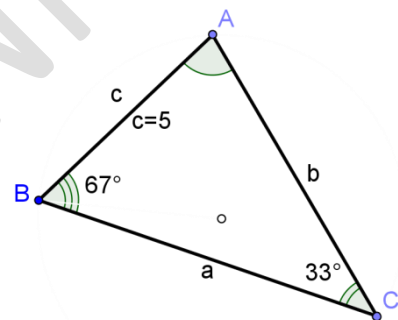
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 4 \times 3 \sin \frac{2\pi}{3} = 6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 6 \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Par suite : } S_{ABCD} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{cm}^2$$

Exercice17: 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = \frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$

Solution :1) $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)$



Donc : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{6} < 2k \leq \frac{5}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-0,5... \leq k \leq 0,4...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{5}{6} < 2k \leq 1 - \frac{5}{6}$

Donc : $-\frac{11}{6} < 2k \leq \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{11}{12} < k \leq \frac{1}{12}$

Donc $-0,9... \leq k \leq 0,08...$ et $k \in \mathbb{Z}$

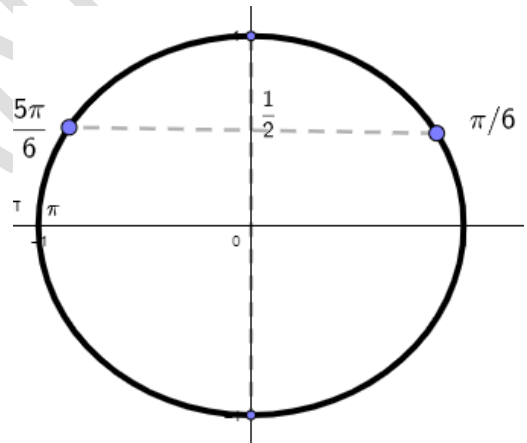
Donc $k = 0$ on remplace on trouve :

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{5\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)

Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$



Exercice18 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{3\pi}{4} < 2k\pi \leq \pi - \frac{3\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{4} < 2k\pi \leq \frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{4} < 2k \leq \frac{1}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{8} < k \leq \frac{1}{8}$

C'est-à-dire : $-0, \dots \leq k \leq 0, \dots$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < -\frac{3}{4} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{3}{4} < 2k \leq 1 + \frac{3}{4}$

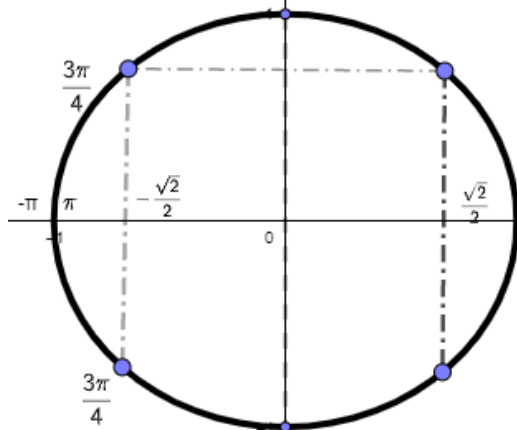
Donc : $-\frac{1}{4} < 2k \leq \frac{7}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{8} < k \leq \frac{7}{8}$

Donc $-0, \dots \leq k \leq 0, \dots$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

Exercice19 : Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$

2) $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$; $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

3) $\sqrt{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$; $I = \mathbb{R}$

4) $\tan x \times \tan 2x = 1$; $I = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$

Solution : 1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x (1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x = 0$ ou $1 - \cos x = 0$ c'est-à-dire : $\tan x = 0$ ou $\cos x = 1$

Équivaut à : $x = k\pi$ ou $x = 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$2) \tan x = -\tan \frac{\pi}{12} \quad ; \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{Équivaut à : } \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{Équivaut à : } x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{avec : } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Or on a : } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc : } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{2} < -\frac{1}{12} + k < \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire : } \frac{1}{12} - \frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\text{Donc : } -\frac{5}{12} < k < \frac{7}{12} \quad \text{avec : } k \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est-à-dire : } k=0 \quad \text{et par suite : } x = -\frac{\pi}{12} + 0 \times \pi = -\frac{\pi}{12}$$

$$\text{Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{est : } S = \left\{ -\frac{\pi}{12} \right\}$$

$$3) \sqrt{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$\text{Équivaut à : } \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{c'est à dire : } \tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{Équivaut à : } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{qui signifie que : } 2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } 2x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad \text{Donc : } x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{Avec : } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \quad \text{est : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4) \tan x \times \tan 2x = 1 \quad ; \quad I = \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$$

$$\text{Équivaut à : } \tan 2x = \frac{1}{\tan x} \quad \text{c'est à dire : } \tan 2x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\text{Équivaut à : } 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad \text{avec : } k \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est à dire : } 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{avec : } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad \text{avec : } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} < \frac{\pi}{4} \quad \text{c'est-à-dire : } -\frac{1}{4} < \frac{1}{6} + \frac{k}{3} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } -\frac{3}{2} < 1 + 2k < \frac{3}{2} \quad \text{avec : } k \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est-à-dire : } -\frac{5}{2} < 2k < \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } -\frac{5}{4} < k < \frac{1}{4} \quad \text{et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{c'est-à-dire : } k=0 \quad \text{ou } k=-1 \quad \text{et par suite : } x = \frac{\pi}{6} \quad \text{et } x = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc les solutions de l'équation dans } I = \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[\quad \text{est : } S = \left\{ -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

Exercice20 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$

$$\text{Équivaut à : } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou } x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

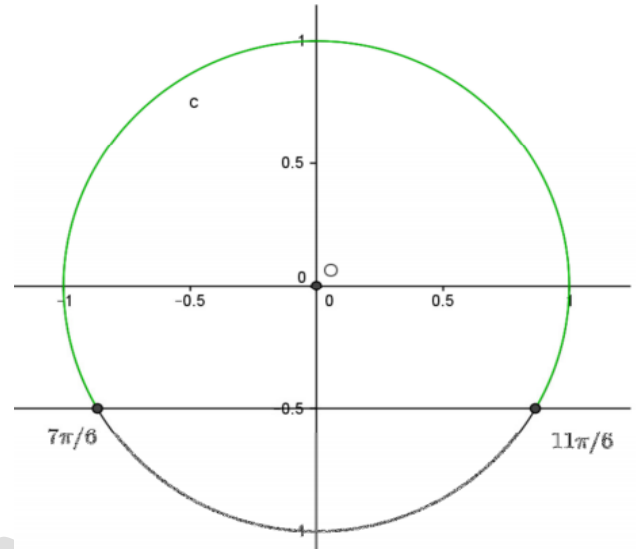
Et puisque : $x \in [0; 2\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$

On trouve que :

$\sin x > -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[0; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$

Donc : $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$



Exercice21 : Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation

suivante : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

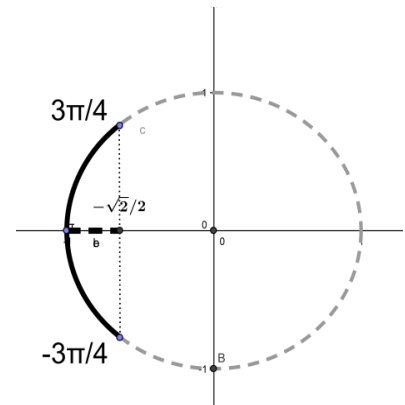
Et puisque : $x \in]-\pi; \pi]$ alors : $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans : $]-\pi; \pi]$

On trouve que : $S = \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$



Exercice22 : Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

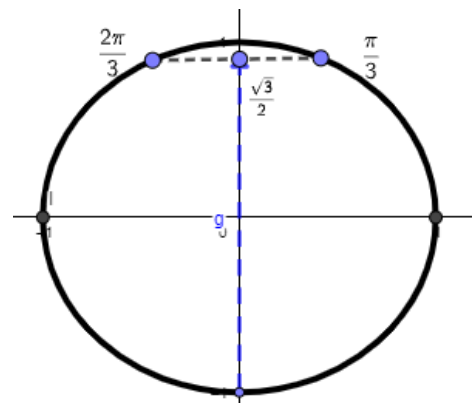
Solution : Soit : $x \in [0; \pi]$ donc : $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Signifie que : $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$

Signifie que : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

Donc : $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$



Exercice23 : Résoudre dans $S = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ l'inéquation suivante : $\tan x \geq 1$

Solution : $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$

Exercice24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \quad (E_1)$

2) $\sqrt{3} \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - 1 = 0 \quad (E_3)(E_2)$

Solution : 1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \quad (E_1)$

On utilise un changement de variable : on pose $t = \sin x$

L'équation (E_2) devienne : $2t^2 - 3t + 1 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3t + 1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

Les racines sont : $t_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{4} = \frac{4}{4} = 1$ et $t_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc : $\sin x = 1$ et $\sin x = \frac{1}{2}$

Donc : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) $\sqrt{3} \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - 1 = 0 \quad (E_3)$

On utilise un changement de variable : on pose $t = \tan x$

L'équation (E_2) devienne : $\sqrt{3} t^2 + (\sqrt{3} - 1)t - 1 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3t + 1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta = \left(-(\sqrt{3} - 1) \right)^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-1) = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$

Les racines sont : $t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 1 + |\sqrt{3} + 1|}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et

$t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1 - |\sqrt{3} + 1|}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1$ donc : $\tan x = -1$ et $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

