http://www.xriadiat.com **DL4 D** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=3cm$ et tel que : $\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=\frac{\pi}{6}rad$

Solution : On a : $L=R\times\alpha=3\times\frac{\pi}{6}cm=\frac{\pi}{2}cm$

Exercice02 : Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C; D d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{85\pi}{3}$; $\frac{-139\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$.

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points

2) En déduire les mesures des angles orientés: $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

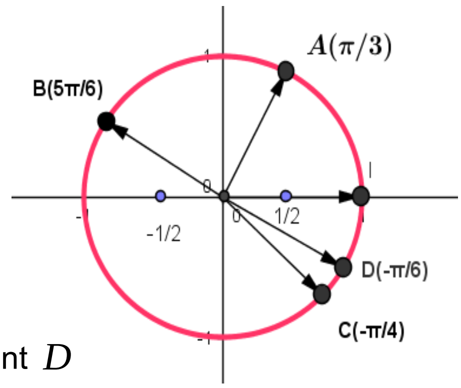
$A\left(\frac{85\pi}{3}\right)$: $\frac{85\pi}{3}=\frac{84\pi+\pi}{3}=\frac{84\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=28\pi+\frac{\pi}{3}$

On a : $\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\frac{139\pi}{6}\right)$: $\frac{-139\pi}{6}=\frac{-144\pi+5\pi}{6}=\frac{-144\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=-24\pi+\frac{5\pi}{6}$

On a : $\frac{5\pi}{6}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(\frac{7\pi}{4}\right)$: $\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$



On a : $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale Du point C.

$D\left(\frac{11\pi}{6}\right)$: $\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}$

On a : $-\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point D

2) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$; On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice03 : Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :1) $A(-\pi)$ 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 3) $C(10\pi)$ 3) $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution :1) π : 3π ; 5π et plus généralement $-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) $-\frac{\pi}{2}$: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

3) 0 : 2π ; 4π et plus généralement $10\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

4) $\frac{7\pi}{4}$: $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice04 : Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivants : 7π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $\cos(7\pi)=\cos(\pi+6\pi)=\cos(\pi+2\times3\pi)=\cos(\pi)=-1$ Car : $\cos x=\cos(x+2k\pi)$

$\sin(7\pi)=\sin(\pi+6\pi)=\sin(\pi+2\times3\pi)=\sin(\pi)=0$ Car : $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ et $\tan(x+k\pi)=\tan x$

$\tan(7\pi)=\tan(0+7\pi)=\tan(0)=0$ Car : $\tan(x+k\pi)=\tan x$

✓ On a : $\frac{5\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ Car : $Sin(\pi-x)=\sin x$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ Car : $\tan(\pi-x)=-\tan x$

✓ On a : $\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

✓ On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $Sin(\pi-x)=\sin x$

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ Car : $\tan(\pi-x)=-\tan x$

Exercice05 : Calculer **:** $A=\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)$; $B=\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$; $C=\tan\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

$D=\sin(2024\pi)$; $E=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)$; $F=\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$

$G=\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$; $H=\cos\left(\frac{37\pi}{2}\right)$; $K=\tan(2025\pi)$

Solution : $A=\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$A=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$B=\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{30\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{30\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$

$B=\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C=\tan\left(\frac{22\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{21\pi+\pi}{3}\right)=\tan\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$D=\sin(2024\pi)=\sin(0+2\times1012\pi)=\sin 0=0$

$E=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$E=\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F=\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{15\pi+\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{15\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$F=-\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

$G=\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{20\pi-\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{20\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(5\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$G=-\sin\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$H=\cos\left(\frac{37\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{36\pi+\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{36\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(18\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$K=\tan(2025\pi)=\tan(0+2025\pi)=\tan(0)=0$

Exercice06 : 1) Sachant que : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et $-\pi<x<0$; calculer : $\sin x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

Donc : $\sin^2 x=\frac{7}{16}$ par suite : $\sin x=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Or $-\pi<x<0$ donc : $\sin x<0$ donc : $\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ et par suite : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Exercice07 : On considère un réel x tel que : $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos x$

2) On sait que : $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{12}; -\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{12}\right\}$ déterminer la valeur exacte de x

Solution :1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{2-2\sqrt{12}+6}{16}$

$\cos^2 x = \dfrac{16-\left(8-2\sqrt{12}\right)}{16} = \dfrac{8+2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$ C'est-à-dire : $\cos^2 x = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Donc : $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or comme $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ donc : $\cos x$ est positif et par suite : $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) On a $\sin x < 0$ car : $\sqrt{2} \prec \sqrt{6}$ donc $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ et de plus $|\cos x| = \left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right| \succ |\sin x| = \left|\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right|$

Donc : $-\dfrac{\pi}{4} < x \leq 0$ et finalement : $x = -\dfrac{\pi}{12}$

Exercice08 : Simplifier les expressions suivantes : $A = \sin(\pi + x) - \cos(\pi - x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(6\pi + x) - \cos(3\pi - x) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

$C = \sin(x - 7\pi) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 11\pi) + \cos\left(\dfrac{-3\pi}{2} - x\right)$

Solution : $A = \sin(\pi + x) - \cos(\pi - x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x + \cos x - \cos x + \sin x = 0$

$B = \sin(6\pi + x) - \cos(3\pi - x) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(2\times 3\pi + x) - \cos(2\pi + \pi - x) + \sin\left(-\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\right) - \cos\left(\dfrac{4\pi - \pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(x) + \cos(x) - \cos(x) - \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x) - \cos\left(-\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)$

$B = \sin(x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) - \sin(x) = 0$

$C = \sin(x - 7\pi) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 11\pi) + \cos\left(\dfrac{-3\pi}{2} - x\right)$

$C = \sin(x - \pi - 6\pi) - \cos\left(\dfrac{4\pi + \pi}{2} + x\right) + \sin(x + 1\pi + 10\pi) + \cos\left(\dfrac{-4\pi + \pi}{2} - x\right)$

$C = \sin(x - \pi) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$C = \sin(-(\pi - x)) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$

$C = -\sin(\pi - x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$

$C = -\sin(x) + \sin(x) - \sin(x) + \sin(x) = 0$

Exercice09 : Sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2) Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+2-2\sqrt{2}+1}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Et puisque : $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) Calculons la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) Déduction des valeurs exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice10 : Soit x un réel ; On pose : $B=8\left(\cos^6x+\sin^6x\right)-12\left(\cos^4x+\sin^4x\right)$

1) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ alors : $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ et que : $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

2) En déduire que : $B=-4$

Solution :1) $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2$

Donc : $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$

Et on a : $(x+y)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

2) Déduction : $B=8\left(\cos^6x+\sin^6x\right)-12\left(\cos^4x+\sin^4x\right)$

$$B=8\left(\left(\cos^2x+\sin^2x\right)^3-3\cos^2x\times\sin^2x\left(\cos^2x+\sin^2x\right)\right)-12\left(\left(\cos^2x+\sin^2x\right)^2-2\cos^2x\sin^2x\right)$$

$B=8\left(1-3\cos^2 x\times\sin^2 x\right)-12\left(1-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8-24\cos^2 x\times\sin^2 x-12+24\cos^2 x\sin^2 x=-4$

Exercice11 : Soit x un réel tel que $\cos x\neq 0$

Montrer les égalités suivantes :1) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$ 2) $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

3) $\sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ 4) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$ 5) $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=2$

6) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution :1) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x-\cos^2 x\tan^2 x$

$\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$ or $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1-\cos^2 x=\sin^2 x$

Par suite : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

2) $1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Donc : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

3) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\tan^2 x\times\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

4) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\cos^2 x}{\cos^2 x\times\sin^2 x}=1$

5) $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x-\sin x}+\frac{(\cos x+\sin x)\left(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x+\sin x}$

Car : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Donc : $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x$

$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\times1=2$$

6) Montrons que : $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

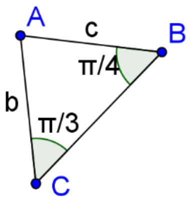
$(1+\sin x+\cos x)^2=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$

$$=1+1+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$$
$$=2(1+\sin x+\cos x+\cos x\sin x)$$
$$=2\left((1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)\right)$$
$$=2(1+\sin x)(1+\cos x)$$

Exercice12 : Soit ABC un triangle tel que : $ACB = \frac{\pi}{3}$ et $ABC = \frac{\pi}{4}$ et $BC = 2\left(\sqrt{3}+1\right)cm$

Montrer que la surface du triangle ABC est $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$

Solution : D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a :



$$\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$$

Donc : $b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$

La surface du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\times BC\sin C = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}$

Donc : $S_{ABC} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$

Exercice13 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi,\pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{4}+2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{4} < 2k\pi \le \pi-\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4} < 2k\pi \le \frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4} \le 2k \le \frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8} \le k \le \frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6... \le k \le 0,37...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{4}+2\times 0\times\pi = \frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{4}+2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < -\frac{1}{4}+2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{1}{4} < 2k \le 1+\frac{1}{4}$

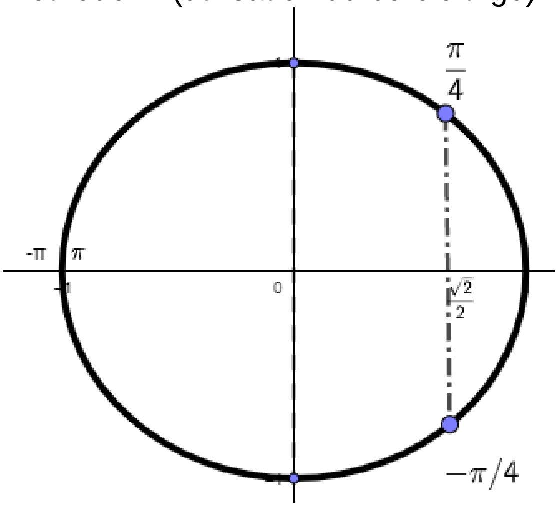
Donc : $-\frac{3}{4} < 2k \le \frac{5}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{8} < k \le \frac{5}{8}$

Donc $-0,37... \leq k \leq 0,62...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\times 0 \times \pi = -\frac{\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice14 : A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec : $x \in]-\pi, \pi]$

1) $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$ avec : $x \in [-2\pi, 3\pi]$

Solution : 1) $x = \frac{\pi}{4}$ 2) $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

Exercice15 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\cos x = -\sin\frac{\pi}{5}$

Solution : $\cos x = -\sin\frac{\pi}{5}$ Équivaut à : $\cos x = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{10} + 2k\pi$

a) Encadrement de : $x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} + 2k\pi < \frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < \frac{7}{10} + 2k < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2} - \frac{7}{10} < 2k < \frac{1}{2} - \frac{7}{10}$

Donc : $-\frac{6}{5} < 2k < -\frac{1}{5}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{10} < k < -\frac{1}{10}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (impossible)

b) Encadrement de : $x = -\frac{7\pi}{10} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{7\pi}{10} + 2k\pi < \frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < -\frac{7}{10} + 2k < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2} + \frac{7}{10} < 2k < \frac{1}{2} + \frac{7}{10}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{5} < 2k \leq \frac{6}{5}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{10} < k \leq \frac{6}{10}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (impossible)

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} = \varnothing$

Exercice16 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$ (E)

2) En déduire dans $[-\pi\,;2\pi[$ les solutions de l'équation (E)

Solution :1) on a : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $-x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $[-\pi\,;2\pi[$ de l'équation (E)

- Encadrement de : $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$: $-\pi \leq \frac{\pi}{12} + 2k\pi < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 \leq \frac{1}{12} + 2k < 2$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{12} \leq 2k < \frac{23}{12}$ cela signifie que : $-\frac{13}{24} \leq k < \frac{23}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et Pour $k = 0$ on trouve : $x_1 = \frac{\pi}{12}$

- Encadrement de : $-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$: $-\pi \leq -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 \leq \frac{-7}{12} + 2k < 2$ alors : $-1 + \frac{7}{12} \leq 2k < 2 + \frac{7}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{24} \leq k < \frac{31}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_2 = \frac{-7\pi}{12}$ et Pour $k = 1$ on trouve $x_3 = \frac{17\pi}{12}$

Donc $S_{[-\pi\,;2\pi[} = \left\{\frac{-7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$

Exercice17: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

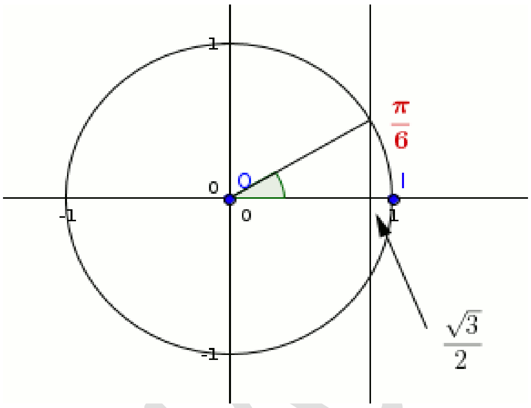
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice18 : Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : Étape 1 : Utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses



On peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité,

j'obtiens : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

- Étape3 :Mais il ne va falloir garder que les valeurs de x dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $\left]-\pi,\pi\right]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a k

Pour la première série de valeurs : $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons on obtient $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus. Par contre, si je choisis $k = -1$:on obtient/ $x = \frac{\pi}{12} - \pi$; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$: $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k = 0$: $x_2 = \frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k' dans $\mathbb{Z}$

pour $k' = -1$: $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k' = 0$: $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k' = 1$: $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=2$: $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Donc : l'ensemble solution de l'équation dans $]-\pi,\pi]$ est donc: $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

Exercice19 : Soit x un réel tel que : $\sin x\times\cos x=\frac{1}{2}$ (E)

Montrer alors que : $\sin x=\cos x$ et déterminer tous les réels x qui vérifient l'égalité (E)

Solution :1) On a : $\sin x\times\cos x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $2\sin x\times\cos x=1$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\times\cos x$

Donc : $\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\times\cos x=0$

Équivaut à : $(\sin x-\cos x)^2=0$

Équivaut à : $\sin x-\cos x=0$ c'est-à-dire : $\sin x=\cos x$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $0=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ qui est impossible

Donc : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : les réels x qui vérifient l'égalité (E) sont : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice20 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (E) : $\cos^3 x+\sin^2 x=-1$ **2)** (F) : $\cos x+\sin x=2$

Solution :1) $\cos^3 x+\sin^2 x=-1$ Équivaut à : $\cos^3 x+\left(1-\cos^2 x\right)=-1$

Équivaut à : $\cos^3 x-\cos^2 x+2=0$

On pose $t=\cos x$ et l'équation (E) devient : $t^3-t^2+2=0$

On cherche les racines du trinôme t^3-t^2+2 :

On remarque que -1 est une racine évidente de : t^3-t^2+2

Par la division euclidienne on trouve que : $t^3-t^2+2=(t+1)(t^2-2t+2)$

Donc : $\cos^3 x-\cos^2 x+2=(\cos x+1)(\cos^2 x-2\cos x+2)$

$\cos^3 x+\left(1-\cos^2 x\right)=-1$ Équivaut à : $(\cos x+1)(\cos^2 x-2\cos x+2)=0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $\cos^2 x-2\cos x+2=0$

Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $\cos^2 x-2\cos x+1=-1$

Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $(\cos x-1)^2=-1$ (impossible)

Équivaut à : $\cos x=-1$ Équivaut à : $x=\pi+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

2) $\cos x+\sin x=2$ Équivaut à : $2-\cos x-\sin x=0$

Équivaut à : $(1-\cos x)+(1-\sin x)=0$ et puisque : $1-\cos x\geq 0$ et $1-\sin x\geq 0$

Équivaut à : $1-\cos x=0$ et $1-\sin x=0$ Équivaut à : $\cos x=1$ et $\sin x=1$ cela est impossible : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

Exercice21 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0 \quad (E_1)$

Solution :1) $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0 \quad (E_1)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\cos x$

L'équation (E_1) devienne : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times3=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ et $t_2=\frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos x=\sqrt{3}$ et $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais l'équation n'a pas de solution car $\sqrt{3}\succ1$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \quad (E_2)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\sin x$

L'équation (E_2) devienne : $2t^2-3t+1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=1$

Les racines sont : $t_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{4}=\frac{4}{4}=1$ et $t_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc : $\sin x=1$ et $\sin x=\frac{1}{2}$

Donc : : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0 \quad (E_3)$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\tan x$

L'équation (E_2) devienne : $\sqrt{3}\,t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta=\left(-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2-4\times\sqrt{3}\times(-1)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et

$t_2=\frac{\sqrt{3}-1-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-1$ donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

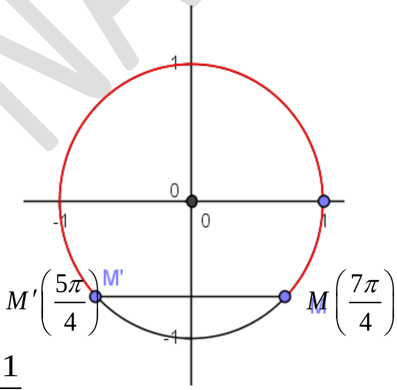
Donc : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice22 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : On sait que : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



L'arc MM' en rouge correspond à tous les points $M(x)$ tel que :

x Vérifie $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $\sin x\geq\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x\geq\sin\frac{\pi}{6}$

Donc : $S=\left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice23 : Résoudre dans $[-2\pi;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x>\frac{1}{2}$

Solution : <u>La démarche :</u> on commence par résoudre l'inéquation sur une période soit par exemple dans $[-\pi;\pi]$ Puis on énonce l'ensemble des solutions en effectuant des translations d'un nombre entier de périodes.

On commence par résoudre l'inéquation sur $[-\pi;\pi]$

L'équation : $\cos x=\frac{1}{2}$ a pour solution : $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=-\frac{\pi}{3}$ dans l'intervalle : $[-\pi;\pi]$

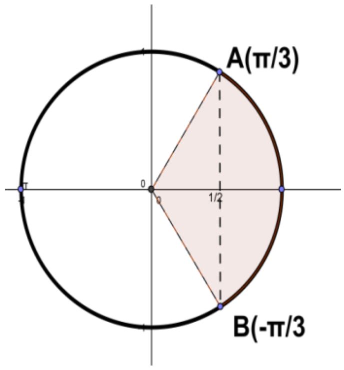
L'inéquation a donc pour solution $S_1=\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$ dans $[-\pi;\pi]$:

L'ensemble des solutions dans $[-2\pi;2\pi]$ est la réunion de tous les intervalles de la forme :

$\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$

Sur l'intervalle : $\left[-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right]$ l'ensemble des solutions est :

$S_2=\left]-\frac{\pi}{3}-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;\frac{\pi}{3}+2\pi\right[$



Finalement l'ensemble des solutions dans $[-2\pi;2\pi]$ est donc :

$S=\left[-2\pi;\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{3}+2\pi;2\pi\right]$

Exercice24 : On pose : $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$

1) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation (E) : $f(x)=0$

2) En déduire le signe de : $f(x)$ dans $]-\pi\,;\pi]$

Solution :1) $f(x)=0$ signifie que : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$

Dans l'intervalle : $]-\pi\,;\pi]$ les solutions sont : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$

Par conséquent : $S_{]-\pi\,;\pi]}=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

2) Déduction du signe de : $f(x)$ dans $]-\pi\,;\pi]$

- Sur l'inter valle : $\left]-\pi\,;-\frac{11\pi}{12}\right[$: on a : $-\pi<x<-\frac{11\pi}{12}$ donc : $-2\pi<2x<-\frac{11\pi}{6}$

Donc : $-2\pi+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{11\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{11\pi}{12}<x<-\frac{5\pi}{12}$ donc : $-\frac{11\pi}{6}<2x<-\frac{5\pi}{6}$

Donc : $-\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[$: on a : $-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$ donc : $-\frac{5\pi}{6}<2x<\frac{\pi}{6}$

Donc : $-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[$: on a : $\frac{\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{12}$ donc : $\frac{\pi}{6}<2x<\frac{7\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<0$

- Sur l'inter valle : $\left]\frac{7\pi}{12};\pi\right[$: on a : $\frac{7\pi}{12}<x<\pi$ donc : $\frac{7\pi}{6}<2x<2\pi$

Donc : $\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{3\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$

Donc : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

On peut alors résumer ces résultats dans un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Exercice25 : Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\cos 2x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1iér étape : On pose : $X=2x$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi\leq 2x\leq\pi$

Équivaut à : $-\pi\leq X\leq\pi$

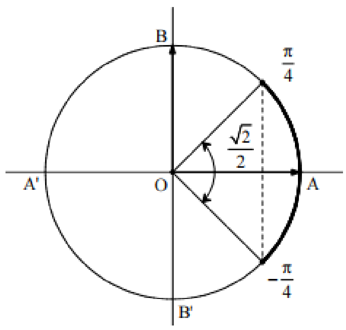
$\cos X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos X=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $X=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $X=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $X\in]-\pi;\pi]$ alors : $X=-\frac{\pi}{4}$ ou $X=\frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos X$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$:

$\begin{cases}\cos X\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\pi\leq X\leq\pi\end{cases}$ Équivaut à : $X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$



2iém étape : Or : $X=2x$

$X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{4}\leq X\leq\frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{4}\leq 2x\leq\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{\pi}{8}\leq x\leq\frac{\pi}{8}$

Donc : $S=\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$

Exercice26 : On pose : $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ avec $x\in[0;\pi]$

1) Calculer : $F(0)$ et $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $F(\pi-x)=F(x)$ pour tout $x\in[0;\pi]$

3) En déduire : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) Ecrire $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x\neq\frac{\pi}{2}$

5) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $F(x)=\frac{4}{7}$ (E)

6) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $F(x)>\frac{4}{7}$ (I)

Solution : 1) $F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ avec $x\in[0;\pi]$

$F(0)=\dfrac{1}{\cos^2 0+2\sin^2 0}=\dfrac{1}{1^2+2\times 0}=1$

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}+2\sin^2\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{6}+2\sin^2\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$

2) Montrons que : $F(\pi-x)=F(x)$ pour tout $x\in[0;\pi]$?

$F(\pi-x)=\dfrac{1}{\cos^2(\pi-x)+2\sin^2(\pi-x)}$

$F(\pi-x)=\dfrac{1}{(-\cos x)^2+2\sin^2 x}=F(x)$

$F(\pi-x)=\dfrac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=F(x)$

3) déduction de : $F(\pi)$ et $F\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$F(\pi)=F(\pi-\pi)=F(0)=1$

$F\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=F\left(\pi-\dfrac{3\pi}{4}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{3}$ et $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=F\left(\pi-\dfrac{5\pi}{6}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$

4) Ecriture de $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x\neq\dfrac{\pi}{2}$:

$F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x\left(1+2\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\times\dfrac{1}{1+2\tan^2 x}=\left(1+\tan^2 x\right)\times\dfrac{1}{1+2\tan^2 x}$

Car : $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ par suite : $F(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}$

5) Résolution dans $[0;\pi]$ de l'équation : $F(x)=0$ (E)

$F(x)=\dfrac{4}{7}$ Équivaut à : $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}=\dfrac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right)=4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7+7\tan^2 x=4+8\tan^2 x$ Équivaut à : $\tan^2 x=3$

Équivaut à : $\tan x=\sqrt{3}$ ou $\tan x=-\sqrt{3}$

Équivaut à : $\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ou $\tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

- Encadrement de $\dfrac{\pi}{3}+k\pi$: $0\leq\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\dfrac{1}{3}+k\leq 1$ équivaut à : $-\dfrac{1}{3}\leq k\leq\dfrac{2}{3}$

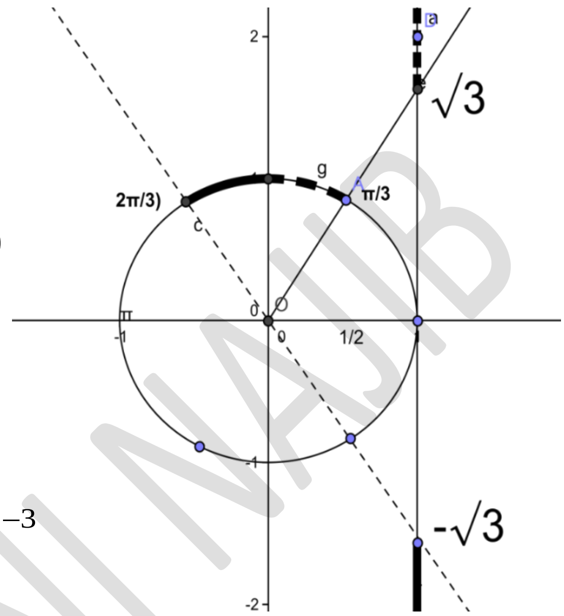
Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\dfrac{\pi}{3}$

- Encadrement de $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$: $0\le -\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le \pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le -\dfrac{1}{3}+k\le 1$ équivaut à : $\dfrac{1}{3}\le k\le\dfrac{4}{3}$

Donc $k=1$ on remplace on trouve $x_2=\dfrac{2\pi}{3}$

Donc $S_{[0;\pi]}=\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right\}$



6) Résolution dans $[0;\pi]$ de l'inéquation : $F(x)>\dfrac{4}{7}$ (I)

$F(x)>\dfrac{4}{7}$ Équivaut à : $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}>\dfrac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right)>4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right)>4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7+7\tan^2 x>4+8\tan^2 x$ Équivaut à : $-\tan^2 x>-3$

Équivaut à : $\tan^2 x<3$ Équivaut à : $\tan^2 x-\sqrt{3}^2<0$

Équivaut à : $\left(\tan x-\sqrt{3}\right)\left(\tan x+\sqrt{3}\right)<0$

$\tan x-\sqrt{3}<0$ Équivaut à : $\tan x<\sqrt{3}$

$\tan x-\sqrt{3}>0$ Équivaut à : $\tan x>\sqrt{3}$

$\tan x+\sqrt{3}<0$ Équivaut à : $\tan x<-\sqrt{3}$

Donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$tanx-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	
$tanx+\sqrt{3}$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
produit		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

$S=\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien