

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMETRIE partie1
- ✓ TRIGONOMETRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice01 : 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 30° .

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 135° .

4) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure 1 rad

5) Convertir en radians les mesures suivantes : 0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 180° ; 360°

Solution : 1) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180}$

$$\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

2) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ implique $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha \times 180 = \beta \times \pi$

$$\beta = \frac{\alpha \times 180}{\pi} = \frac{3\pi \times 180}{8\pi} = 67,5^\circ$$

3) on a : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{135}{180}$

$$\text{Équivalent à : } \alpha = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

4) $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha \times 180 = \beta \times \pi$

$$\beta = \frac{1 \times 180}{\pi} = \frac{180}{\pi} = 57,29579143... \text{ deg} \approx 57,2^\circ$$

5) De la même manière (en appliquant : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180}$)

Nous obtenons les mesures remarquables que résume le tableau suivant :

En degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
En radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercice02 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

$$7\pi, \frac{110\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, -\frac{131\pi}{3}, -\frac{217\pi}{6}$$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$$H\left(-\frac{\pi}{4}\right) ; F\left(-\frac{5\pi}{6}\right) ; I\left(\frac{2007\pi}{4}\right) ; N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Solution :

- $x = 7\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = 7\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < 7\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $\pi - 7\pi < 2k\pi \leq \pi - 7\pi$

Équivalent à : $-8 < 2k \leq -6$

Équivalent à : $-4 < k \leq -3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -3$ et donc $\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = 7\pi$ est $\alpha = \pi$

▪ $x = \frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{110\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{110\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{107\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113}{6} < k \leq -\frac{107}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-18.83 < k \leq -17.83$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -18$ et donc $\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi = \frac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \frac{110\pi - 108\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{110\pi}{3}$ est $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

▪ $x = \frac{19\pi}{4}$

On a $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$ et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisse curviligne principale associée a $\frac{19\pi}{4}$ est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

▪ $x = -\frac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi + \frac{131\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{131\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{134\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128}{6} < k \leq \frac{134}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $21.33 < k \leq 22.33$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 22$ et donc $\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{131\pi}{3} + 2(22)\pi = \frac{-131\pi + 132\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x = -\frac{131\pi}{3}$ est $\alpha = \frac{\pi}{3}$

▪ $x = -\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi + \frac{217\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi + \frac{217\pi}{6}$ Équivalent à : $\frac{211\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{223\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{211}{12} < k \leq \frac{223}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $17.58 < k \leq 18.58$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k=18$ et donc : $\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{217\pi}{6} + 2(18)\pi = -\frac{217\pi + 216\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée à $x = -\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$ et $\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi$ On a $x = \frac{7\pi}{2}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée à $x = \frac{7\pi}{2}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

▪ $x = \frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve 501,75 on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi$ et $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Methode2 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

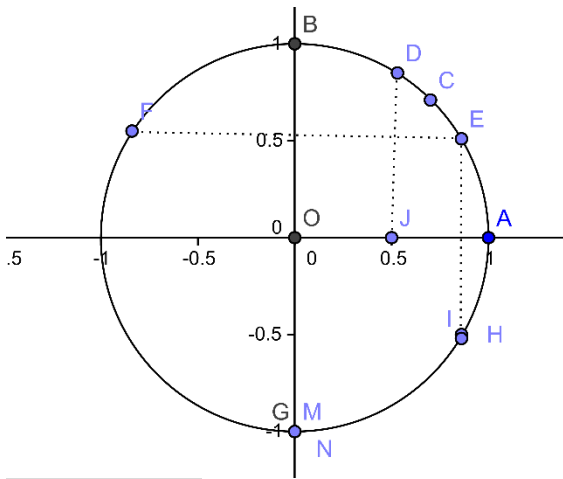
Équivalent à : $-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1$

Équivalent à : $-1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq 1 - \frac{2007}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{2011}{8} < k \leq \frac{2003}{8}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-251,3 \approx -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \approx -250,3$

Donc $k = -251$ par suite : $\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{4}$



Exercice03 : Soit sur un cercle trigonométrique un point A d'abscisse curviligne principale $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et ce point tourne sur ce cercle.

Quel est le nombre de tours effectués par ce point si $x = \frac{65\pi}{4}$ est son abscisse curviligne.

Solution : $\frac{65\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ avec : k le nombre de tours effectués par le point.

$$\frac{65\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ Équivalent à : } 2k\pi = \frac{65\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{64\pi}{4}$$

$$\text{Équivalent à : } 2k = \frac{64}{4} \text{ Équivalent à : } k = \frac{64}{8} = 8$$

Le nombre de tours effectués par le point est $k = 8$

Exercice04 : Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right)$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \in]-\pi ; \pi] \text{ Équivalent à : } -\pi < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi$$

$$\text{Équivalent à : } -1 < \frac{1}{3} + \frac{k}{2} \leq 1$$

$$\text{Équivalent à : } -1 - \frac{1}{3} < \frac{k}{2} \leq 1 - \frac{1}{3}$$

$$\text{Équivalent à : } -\frac{4}{3} < \frac{k}{2} \leq \frac{2}{3} \text{ c'est-à-dire : } -\frac{8}{3} < k \leq \frac{4}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

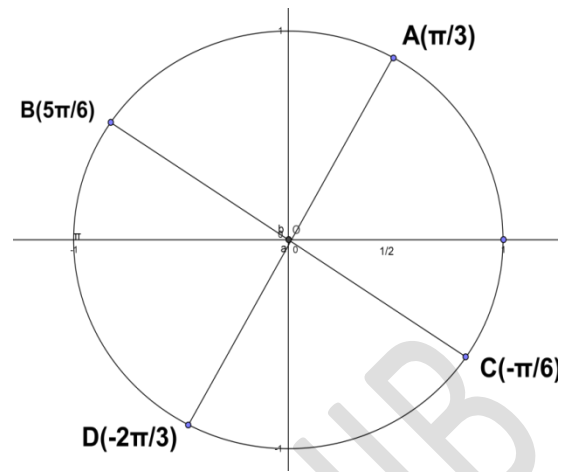
Par suite : $k = -2$ ou $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$

$$\text{Si } k = 0 \text{ alors : } A \left(\frac{\pi}{3} \right).$$

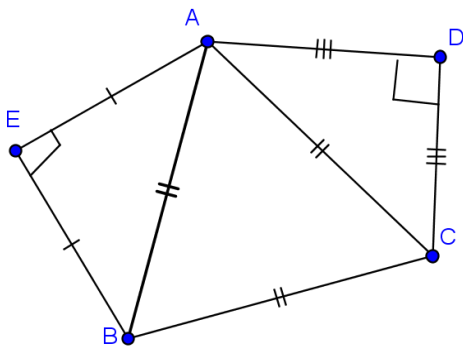
$$\text{Si } k = 1 \text{ alors : } B \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1\pi}{2} \right) \text{ c'est-à-dire : } B \left(\frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\text{Si } k = -1 \text{ alors : } C \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1\pi}{2} \right) \text{ c'est-à-dire : } C \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

Si $k = -2$ alors : $D\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$



Exercice05 : D'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE})$; $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EA})$ et $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$



Solution : Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

- La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

- La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ est $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit : $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

- On a : $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD})$

Donc : La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ est : $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ cad $-\frac{7\pi}{12}$

- Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$

Ssi $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$ est $\frac{5\pi}{6}$

- On a : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE})$

Donc : La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE})$ est : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ cad $\frac{7\pi}{12}$

- La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{EA})$ est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice06 : Sachant que. $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{7}[2\pi]$ et $(\vec{u}; \vec{w}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer la mesure principale de : $(\vec{v}; \vec{w})$; $(-\vec{u}; \vec{v})$ et $(-\vec{w}; \vec{v})$

Solution : $(\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{w})[2\pi]$

$$\equiv -(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; \vec{w})[2\pi]$$

$$\equiv -\left(-\frac{\pi}{7}\right) - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $(\vec{v}; \vec{w}) \equiv -\frac{3\pi}{28}[2\pi]$

$$(-\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

$$\equiv \pi - \frac{\pi}{7}[2\pi] \quad \text{Donc : } (-\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{6\pi}{7}[2\pi]$$

$$(-\vec{w}; \vec{v}) \equiv \pi + (\vec{w}; \vec{v})[2\pi]$$

$$\equiv \pi - (\vec{v}; \vec{w})[2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $(-\vec{w}; \vec{v}) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice07 : Soit $-\pi < x < \pi$; calculer :

$$A = \sin\left(\frac{6\pi - x}{6}\right) + \sin\left(\frac{12\pi + 2x}{12}\right) ; \quad B = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) ;$$

$$C = \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) ; \quad E = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} ; \sin\frac{53\pi}{6} ; \cos\frac{34\pi}{3} ; \cos\frac{13\pi}{6} ; \tan\frac{37\pi}{4}$$

Solution : On peut utiliser les résultats des tableaux suivants :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

$$A = \sin\left(\frac{6\pi - x}{6}\right) + \sin\left(\frac{12\pi + 2x}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{x}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{x}{6}\right) \quad A = \sin\left(\frac{x}{6}\right) - \sin\left(\frac{x}{6}\right) = 0$$

$$B = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = -\sin\frac{\pi}{3} - \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$C = \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$$

$$C = \cos\left(\frac{12\pi + 2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{24\pi - \pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2}\right)$$

$$C = \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \times 1 = -1 - 2 = -3$$

$$D = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$D = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$E = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$E = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$E = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Donc : } E = \sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{53\pi}{6} = \sin\left(\frac{54\pi - \pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{54\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(9\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(8\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin \frac{53\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{34\pi}{3} = \cos \left(\frac{33\pi + \pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{33\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(11\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(10\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{34\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{37\pi}{4} = \tan \left(\frac{36\pi + \pi}{4} \right) = \tan \left(\frac{36\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(9\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Exercice08 : Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos(3\pi - x) + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$B(x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$C(x) = \cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(\pi + x)$$

Solution : 1) $A(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos(3\pi - x) + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

$$A(x) = \cos x + \cos(2\pi + \pi - x) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$A(x) = \cos x + \cos(\pi - x) - \cos x$$

$$A(x) = \cos x - \cos x - \cos x$$

$$A(x) = -\cos x$$

$$B(x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$B(x) = -\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin \left(x - 2\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$B(x) = -\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \text{ donc : } B(x) = -\sin x$$

$$C(x) = \cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(\pi + x)$$

$$C(x) = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x \right) - 2\sin(x) - 4\sin x$$

$$C(x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 6\sin(x) = \sin x - 6\sin x = -5\sin x$$

Exercice09 : Montrer que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Solution : $1 + (\tan x)^2 = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

Et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc : $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$

Exercice10 : On a : $\tan(x) = \frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $10 \cos^2 x = 9$ c'est-à-dire : $\cos^2 x = \frac{9}{10}$

Donc $\cos x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: donc $\cos x \leq 0$ et par suite : $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: donc $\sin x = \tan x \times \cos x$

Donc : $\sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice11 : 1) Sachant que : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Solution : 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc : $\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$ C'est-à-dire : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $\frac{9\pi}{5} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) < 0$

Par suite : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

De même on a : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice12 : Soit l'expression suivante : $A(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 6\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

1) Montrer que : $A(x) = \cos^2 x - \cos x$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(4\pi - x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x = 3$

Solution : 1) $A(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 6\pi) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$

$$A(x) = \cos^2 x - \cos(-x) + \cos(2\pi + \pi + x) + \sin\left(x - 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad A(x) = \cos^2 x - \cos(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A(x) = \cos^2 x - \cos x - \cos x + \cos x$$

Donc : $A(x) = \cos^2 x - \cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x) = \cos^2 x - \cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc : } A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

3)a) Calculons en fonction de : $\sin x$ le nombre : $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(4\pi - x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(-x)}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-x)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Donc : $A = \frac{\sin^2 x \cos x}{-\cos x} = -\sin^2 x$

b) Dédution de la valeur de A si $\tan x = 3$

On sait que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x \tan^2 x = \sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \tan^2 x$ et puisque : $\tan x = 3$ alors :

$$A = -\sin^2 x = -\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{9}{1 + 9} = -\frac{9}{10}$$

Exercice13 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Solution :1) $A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10}$

On remarque que : $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$ donc : $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$

Donc : $A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$

$$A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

2) $B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

On remarque que : $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$ et $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$ donc : $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

Donc : $B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left(-\cos \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left(-\cos \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} + 2\cos^2 \frac{3\pi}{8}$$

$$B = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) \text{ Et puisque on a aussi : } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Alors : $B = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi$ donc : $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$.

Et on a : $\frac{3\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi$ donc $\frac{9\pi}{12} = \pi - \frac{3\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi$ donc $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$

Donc on a : $C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$C = 2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Et on remarque aussi que $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$

$$C = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) + 1 = 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{12}\right)\right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Exercice14 : Simplifier les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

$$A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

$$B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$C = \sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x$$

$$D = \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$$

Solution : $A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$$A = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$$

$$A = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2 \times 1 = 2 \quad B = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$B = \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^4 x + \sin^2 x$$

$$B = \cos^2 x (\cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin^2 x - 1)$$

On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$ et $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$

$$B = \cos^2 x \times (-\sin^2 x) - \sin^2 x (-\cos^2 x)$$

$$B = -\cos^2 x \times \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$C = \sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x$$

$$C = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x$$

$$C = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + 2\cos^2 x$$

$$C = \sin^2 x - \cos^2 x + 2\cos^2 x$$

$$C = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$D = \sin^6 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$$

$$D = 2\sin^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x$$

$$D = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2 \times 1 = 2$$

Exercice15 : Ecrire seulement en fonction de $\tan x$ les expressions suivantes :

1) $A = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$

2) $B = \frac{\sin^2 x + 3\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

3) $C = \cos^2 x - \sin x \cos x$

Solution : 1) $A = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ On a : $\sin x = \tan x \times \cos x$

$$\text{Donc : } A = \frac{\tan^3 x \times \cos^3 x - \cos^3 x}{\tan x \times \cos x + \cos x}$$

$$\text{Donc : } A = \frac{\cos^3 x (\tan^3 x - 1)}{\cos x (\tan x + 1)}$$

$$\text{Donc : } A = \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x + 1} \text{ or on a : } \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Donc : } A = \frac{1}{\tan^2 x + 1} \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x + 1} = \frac{\tan^3 x - 1}{(\tan^2 x + 1)(\tan x + 1)}$$

$$2) B = \frac{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$B = \frac{\tan^2 x \times \cos^2 x + 3 \tan x \times \cos x \cos x}{\tan^2 x \times \cos^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x (\tan^2 x + 3 \tan x)}{\cos^2 x (\tan^2 x - 1)} \text{ etp ar suite : } B = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x}{\tan^2 x - 1}$$

$$3) \text{ On a : } \sin x = \tan x \times \cos x \text{ donc : } C = \cos^2 x - \tan x \times \cos x \cos x$$

$$\text{Donc : } C = \cos^2 x (1 - \tan x) \text{ or } \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{1}{1 + \tan^2 x} (1 - \tan x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

Exercice16 : A partir du triangle de la figure suivante, trouvez :

a) la valeur du côté a

b) la mesure de l'angle B ;

c) la valeur du côté b.

Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du

triangle : $A = 37^\circ$ et côté $c = 30 \text{ cm}$ et $C = 50^\circ$

a) Calcul de la valeur du côté a : il s'agit donc d'application de la loi des sinus.

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$$\text{Isolons-le côté a : } a = \frac{c \sin A}{\sin C} \text{ donc : } a = \frac{30 \sin 37^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{30 \times 0,6018}{0,7660} \approx 23,569 \text{ cm}$$

b) Calcul de la valeur de l'angle B

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : $B = 180^\circ - (A + C)$

$$B = 180^\circ - (50^\circ + 37^\circ) \text{ donc : } B = 93^\circ$$

c) Calcul de la valeur du côté b

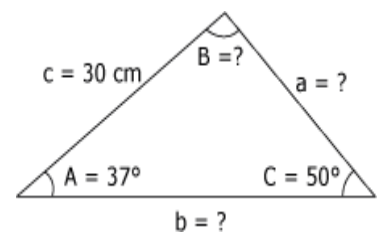
De la loi des sinus, nous tirons la relation suivante : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$$\text{Isolons le côté b : } b = \frac{c \sin B}{\sin C} \text{ donc : } b = \frac{30 \sin 93^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{30 \times 0,9986}{0,7660} \approx 39,11 \text{ cm c'est-à-dire : } b = 39,11 \text{ cm}$$

Exercice17 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Solution :1) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Équivaut à : } \sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ Équivaut à : } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$



Donc : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi + \frac{\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{2\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{4\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$ Équivaut à : $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$

C'est-à-dire : $-0,3... \leq k \leq 0,6... \text{ et } k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{4}{3} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{4}{3} < 2k \leq 1 - \frac{4}{3}$

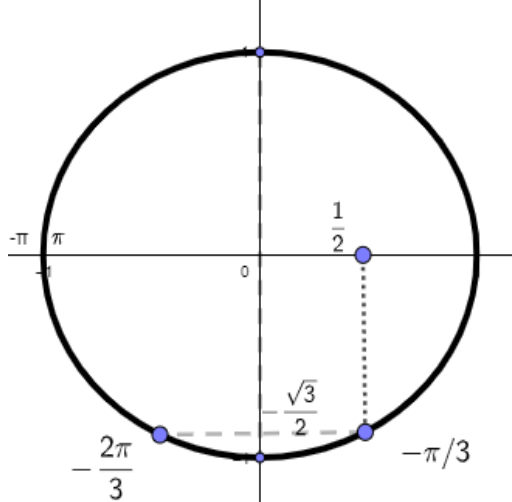
Donc : $-\frac{7}{3} < 2k \leq -\frac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{6} < k \leq -\frac{1}{6}$

Donc $-1,16... \leq k \leq -0,16... \text{ et } k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -1$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2 \times (-1) \times \pi = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$

Exercice18 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = \frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$

Solution :1) $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{4\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{2\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{4}{3} \leq 2k \leq \frac{2}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

C'est-à-dire : $-0, \dots \leq k \leq 0, \dots$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{1}{3} < 2k \leq 1 + \frac{1}{3}$

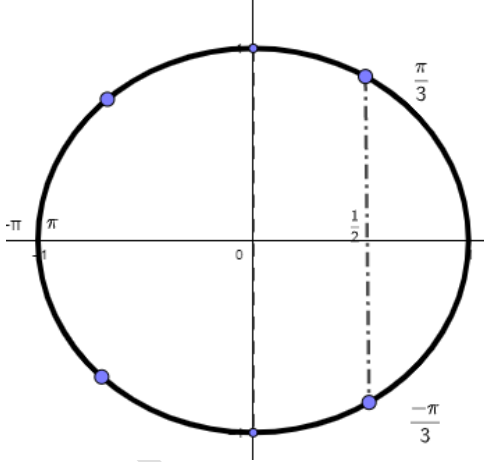
Donc : $-\frac{2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$

Donc $-0, \dots \leq k \leq 0, \dots$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$

Exercice19 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\tan x = 1$

2) Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation suivante : $\tan x = 1$

Solution :1) On a : $\tan x = 1$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec ; $k \in \mathbb{Z}$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ signifie que : $\tan x = \tan \frac{\pi}{4}$ si et seulement si : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $]-\pi; \pi]$ l'équation : $\tan x = 1$

$\tan x = 1$ Signifie que : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs à k

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons on obtient : $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$: on obtient $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$; cette valeur appartient à $]-\pi, \pi]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k = -1$: $x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 0$: $x_2 = \frac{\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $]-\pi; \pi]$ sont : $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$ et $x_2 = \frac{\pi}{4}$

Par suite : $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$

Exercice20 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $4 \tan x + 4 = 0$

2) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'équation suivante : $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ l'équation suivante : $2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$

Solution : 1) on a $4 \tan x + 4 = 0$ est définie dans $\mathbb{R}$ équivaut à : $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$4 \tan x + 4 = 0$ Équivaut à : $\tan x = -1$

Équivaut à : $\tan x = -\tan \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$ Equivaut à : $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos 2x = -\cos \frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire : $\cos 2x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$

Équivaut à : $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$ avec: $k \in \mathbb{Z}$

- Encadrement de $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$: $-\pi \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-1 \leq \frac{5}{12} + k < 1$ cad $-1 - \frac{5}{12} \leq k < 1 - \frac{5}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{17}{12} \leq k < \frac{7}{12}$

Par suite : $k = 0$ ou $k = -1$

Si $k = 0$ alors : $x = \frac{5\pi}{12} + 0\pi = \frac{5\pi}{12}$

Si $k = -1$ alors : $x = \frac{5\pi}{12} - 1\pi = \frac{-7\pi}{12}$

- Encadrement de $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$: $-\pi \leq -\frac{5\pi}{12} + k\pi < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-1 \leq -\frac{5}{12} + k < 1$ cad $-\frac{7}{12} \leq k < \frac{17}{12}$

Par suite : $k = 0$ ou $k = 1$

Si $k = 0$ alors : $x = -\frac{5\pi}{12} + 0\pi = -\frac{5\pi}{12}$

Si $k = 1$ alors : $x = -\frac{5\pi}{12} + 1\pi = \frac{7\pi}{12}$

Finalement : $S = \left\{ -\frac{7\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} \right\}$

3) $2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$ Équivaut à : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

L'équation a pour solutions $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq \frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$

Donc $-\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{11}{8}$ c'est-à-dire : $-0,12 \leq k \leq 1,37$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$

- Encadrement de $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$: $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $-\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} + 2k \leq \frac{5}{2}$ Donc $-\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$

Donc : $-\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$ Donc $-0,8 \leq k \leq 0,6$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k = 0$

Pour $k = 0$ on trouve $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$ Donc $S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

Exercice21 : Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation : $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$

Solution : $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

Encadrement de : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{12} + k < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} < k < \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12} < k < \frac{7}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k = 0$ par suite : $x = -\frac{\pi}{12} + 0 \times \pi = -\frac{\pi}{12}$

Donc $S_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} = \left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

Exercice22 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0; \pi]$

Solution :1) On pose $t = \cos x$ et l'équation (E) devient : $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 3 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 3$:

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 \times 3 = 27 - 24 = 3$

Les racines sont : $t_1 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_2 = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \times 2} = \sqrt{3}$

Donc : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = \sqrt{3}$

- Pour : $\cos x = \sqrt{3}$

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc l'équation $\cos x = \sqrt{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

- Pour : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs à k

a) Pour : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Prenons par exemple la valeur $k = -1$ et remplaçons on obtient : $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$; cette valeur

n'appartient pas à $[0; \pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = 0$: on obtient $x = \frac{\pi}{6}$; cette valeur appartient à $[0; \pi]$.

Pour $k=1$: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \notin [0; \pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1

Donc : la seule valeur dans $[0; \pi]$ est : $x = \frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

La même démarche que précédemment

Pas de valeurs dans $[0; \pi]$

Conclusion : $S_{[0; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$

Exercice23 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\sin^2 x = 1$

Solution : Règles : Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

On effectue la racine carrée de chaque côté de l'égalité et on obtient : $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$

En regardant dans le cercle trigonométrique, on trouve que :

$\sin x = 1$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -1$ Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice24 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin(2x) = \cos(3x)$ 3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{3}$

Solution : 1) on a : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) on a : $\sin(2x) = \cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Équivaut à : } 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3) \text{ on a : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{3} \text{ équivaut à : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Équivaut à : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ équivaut à : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Équivaut à : } \frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } -x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ cad } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc les solutions de l'équation dans } \mathbb{R} \text{ sont : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice25 : A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

$$1) \cos x = \frac{1}{2} \text{ et } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ avec : } x \in]-\pi, \pi]$$

$$2) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ avec : } x \in [-\pi, 3\pi]$$

$$\text{Solution : } 1) x = -\frac{\pi}{3} \quad 2) x \in \left\{ -\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

Exercice26 : Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\text{Solution : } \sin x = \frac{1}{2} \text{ Équivaut à : } \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Et puisque : } x \in [0; 2\pi] \text{ alors : } x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

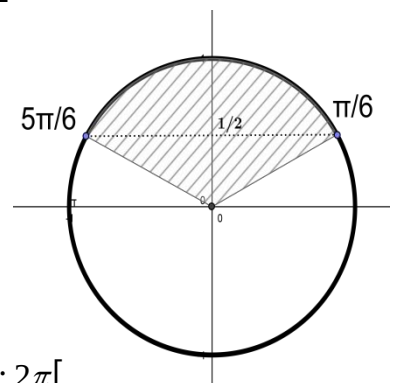
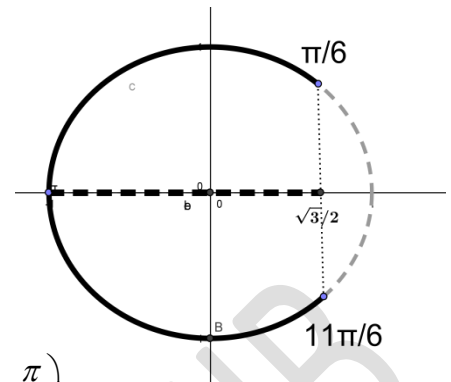
En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$

$$\text{On trouve que : } \sin x \geq \frac{1}{2} \text{ Équivaut à : } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right] \text{ Donc : } S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$$

Exercice27 : (**) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Solution : } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Équivaut à : } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$



Et puisque : $x \in [0; 2\pi]$ alors : $x = \frac{11\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ (on utilisant les encadrements)

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Équivaut à : } \cos x < \cos \frac{\pi}{6}$$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$

$$\text{On trouve que : } S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$$

Exercice28: Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

Solution : On utilise le cercle trigonométrique :

$$1) S = \left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right] \quad 2) S = [0; \pi]$$

Exercice29 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

Solution : $\tan x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq 1$

- L'inéquation $\tan x - 1 \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Et puisque : } x \in [0; 2\pi] \text{ alors : } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{3\pi}{2}$$

- Résolution de l'équation : $\tan x = 1$

$$\tan x = 1 \text{ Équivaut à : } \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \text{ Équivaut à : } x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Et puisque : } x \in [0; 2\pi] \text{ alors : } x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4}$$

En utilisant le cercle trigonométrique

On compare $\tan x$ et 1 dans $[0; 2\pi]$

$$\text{On trouve que : } \tan x \geq 1 \text{ Équivaut à : } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right[$$

Exercice30: Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$

Solution :

1^{er} étape : On pose : $X = 2x$

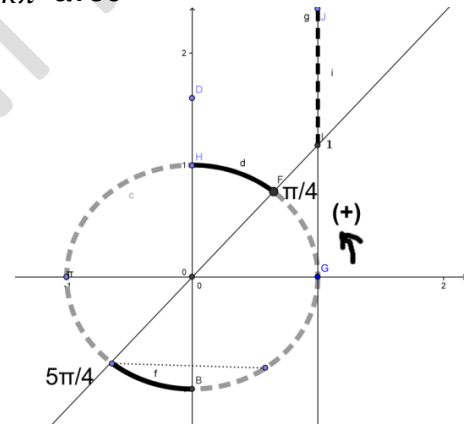
$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ Équivaut à : } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ Équivaut à : } -\pi \leq 2x \leq \pi$$

$$\text{Équivaut à : } -\pi \leq X \leq \pi$$

$$\sin X = \frac{1}{2} \text{ Équivaut à : } \sin X = \sin \frac{\pi}{6}$$

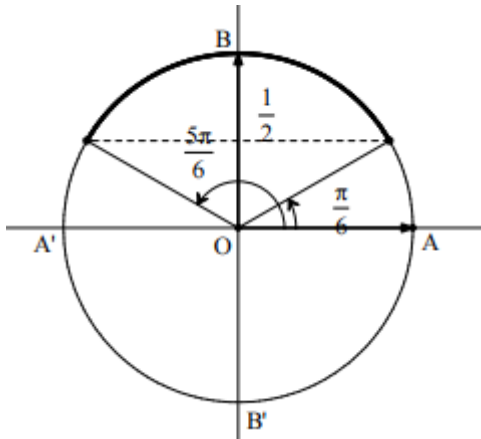
$$\text{Équivaut à : } X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } X = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } X = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$



Et puisque : $-\pi \leq X \leq \pi$ alors : $X = \frac{\pi}{6}$ ou $X = \frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin X$ et $\frac{1}{2}$ dans $-\pi \leq X \leq \pi$



$$\begin{cases} \sin X \geq \frac{1}{2} \\ -\pi \leq X \leq \pi \end{cases} \text{ Équivaut à : } X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$$

On trouve que : $\sin X \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$

2iér étape : Or : $X = 2x$

$$X \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right] \text{ Équivaut à : } \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ Équivaut à : } \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right]$$

Exercice31 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : (I) : $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 1) > 0$

Solution :

L'inéquation (I) existe si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Mais dans : $[0; 2\pi]$: $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

$$\text{Donc : } D_I = [0; 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Réolvons dans $[0; 2\pi]$ les équations : $2\sin x - 1 = 0$ et $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

- $2\sin x - 1 = 0$ Équivaut à : $2\sin x = 1$ Équivaut à : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{Équivaut à : } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

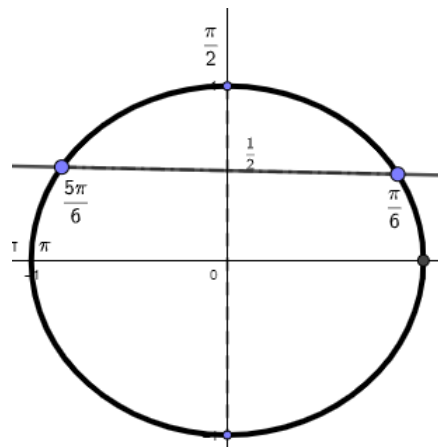
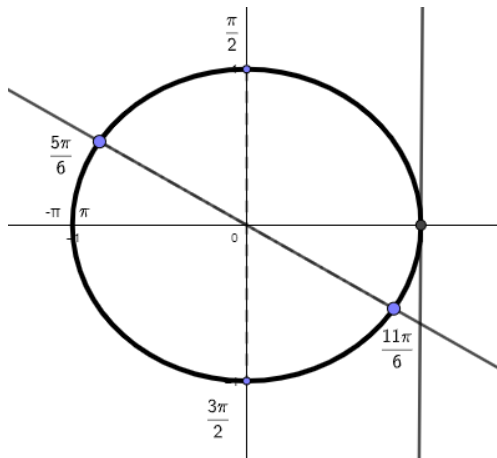
$$\text{Mais dans : } [0; 2\pi] : x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

- $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$ Équivaut à : $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Mais dans : $[0; 2\pi]$: $x = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

On va étudier le signe des expressions : $P_1(x) = 2\sin x - 1$ et $P_2(x) = \sqrt{3}\tan x + 1$



On en déduit le tableau de signe de l'expression : $P(x) = (2\sin x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 1)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π		
$2\sin x-1$	-	0	+	+	0	-	-		
$\sqrt{3}\tan x+1$	+	+	-	0	+	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	-	0	-	+	0	-

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right[$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien