http://www.xriadiat.com **DL4 A** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 150°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{5\pi}{2}$ rad.

Solution :1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{150}{180}$

$\alpha=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{6}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{\alpha\times180}{\pi}=\frac{5\pi}{2}\times\frac{180}{\pi}=450°$

Exercice02 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) $x_1=-6\pi$ b) $x_2=\frac{31\pi}{3}$ c) $x_3=\frac{-23\pi}{6}$ d) $x_4=\frac{127\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$; $C(x_3)$; $D(x_4)$

Solution :1) a) $x_1=-6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_1=2k\pi$ c a d $\alpha=-6\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<-6\pi+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+6\pi<2k\pi\le\pi+6\pi$

Équivalent à : $5\pi<2k\pi\le7\pi$

Équivalent à : $5<2k\le7$

Équivalent à : $\frac{5}{2}<k\le\frac{7}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=3$ et donc $\alpha=-6\pi+2\times3\pi=-6\pi+6\pi=0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$ est $\alpha=0$

b) $x_2=\frac{31\pi}{3}$

Methode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_2=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{31\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{31\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\frac{31\pi}{3}<2k\pi\le\pi-\frac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34\pi}{3}<2k\pi\le-\frac{28\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34}{3}<2k\le-\frac{28}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\frac{17}{3}<k\leq-\frac{14}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-5,6<k\leq-4,6$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-5$ et donc : $\alpha=\frac{31\pi}{3}+2k\pi=\frac{31\pi}{3}+2(-5)\pi=\frac{31\pi}{3}-10\pi=\frac{31\pi-30\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2=\frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha=\frac{\pi}{3}$

Methode2 : $x_2=\frac{31\pi}{3}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq 10,3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10\times3=30$

On a $\frac{31\pi}{3}=\frac{30\pi+\pi}{3}=\frac{30\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+10\pi=\frac{\pi}{3}+5\times2\pi$ et $\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2=\frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha=\frac{\pi}{3}$

c) $x_3=\frac{-23\pi}{6}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 23 par 6 on trouve $\simeq 3,8$ on prend le nombre entier proche ex : 4 et $6\times4=24$

On a $\frac{-23\pi}{6}=\frac{-24\pi+\pi}{6}=\frac{-24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-4\pi=\frac{\pi}{6}+(-2)\times2\pi$ et $\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_3=\frac{-23\pi}{6}$ est : $\alpha=\frac{\pi}{6}$

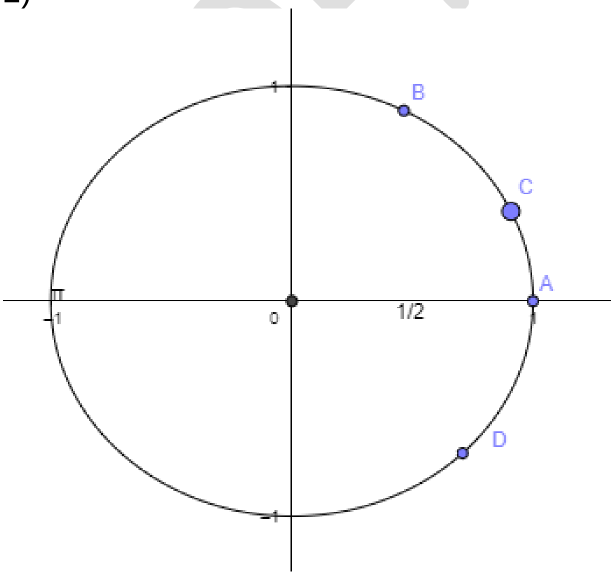
d) $x_4=\frac{127\pi}{4}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 127 par 4 on trouve $\simeq 31,7$ on prend le nombre entier proche ex : 32 et $32\times4=128$

On a $\frac{127\pi}{4}=\frac{128\pi-\pi}{4}=\frac{128\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+32\pi=-\frac{\pi}{4}+16\times2\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_4=\frac{127\pi}{4}$ est : $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

2)

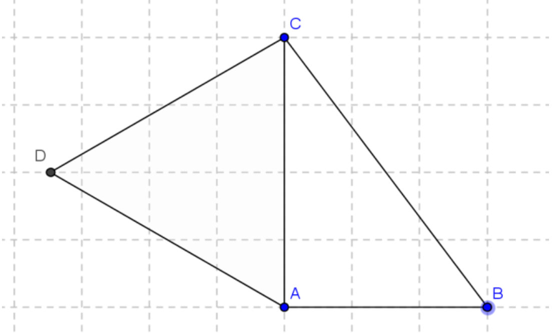


Exercice03 : ABC est un triangle rectangle en A direct, tel que $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.

2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

Solution :



$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Dans le triangle ABC on a : $ABC+BAC+ACB=\pi$ donc : $ACB=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Donc, vue l'orientation : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice04 : (**) $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ *et* $\vec{k}$ des vecteurs tel que :

$\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\left(\vec{w};\vec{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\left(\vec{k};\vec{w}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer les mesures de l'angle orienté suivant : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)$

Solution : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)+\left(\vec{v};\vec{w}\right)+\left(\vec{w};\vec{k}\right)[2\pi]$(Relation de Chasles)

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\vec{w};\vec{v}\right)-\left(\vec{k};\vec{w}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

Exercice05 : On a : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc : $(\cos x)^2 + \frac{16}{25} = 1$

Donc $(\cos x)^2 = 1 - \frac{16}{25}$ c'est à dire **:** $(\cos x)^2 = \frac{9}{25}$

Donc : $\cos x = \sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x \geq 0$ et par suite : $\cos x = \frac{3}{5}$

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}$.

Exercice06 : Sachant que : $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{10}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{1+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\frac{5+5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{10-2\sqrt{5}}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{10} = \frac{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}{100-20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq 0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) Calculons la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

On a : $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}$ c'est-à-dire : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3) On a : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$ car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

On a aussi: $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$ par suite : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Exercice07 : Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

Solution : $E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$E=4\cos^2 x+4\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-4\cos x\sin x+4\sin^2 x$

$E=5\cos^2 x+5\sin^2 x=5\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=5\times1=5$ $F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\left(\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\cos^4 x+2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-3\cos^4 x-3\sin^4 x$

$F=-\cos^4 x-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$F=-\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$F=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=-1$

$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\cos^4 x\sin^4 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\right)+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^2 x\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^6 x+2\cos^6 x\sin^2 x+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^6 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x+2\cos^6 x\sin^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x$

$G=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\left(1-\sin^2 x\right)}+\sqrt{\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}$

$H=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$

$H=\sqrt{\left(\sin^2 x-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-2\right)^2}$

$H=\left|\sin^2 x-2\right|+\left|\cos^2 x-2\right|$ Or on a $-1\le \sin x\le 1$ et $-1\le \cos x\le 1$

Donc : $0\le \sin^2 x\le 1$ et $0\le \cos^2 x\le 1$

Donc : $\sin^2 x-2\prec 0$ et $\cos^2 x-2\prec 0$

Donc : $H=-\left(\sin^2 x-2\right)-\left(\cos^2 x-2\right)$

Donc : $H=-\sin^2 x+2-\cos^2 x+2$

Donc : $H=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2+2=-1+4=3$

Exercice08: Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivants :

-8π, $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{35\pi}{4}$

Solution : Remarque : On peut utiliser le Cosinus, sinus et tangente des angles remarquables :

x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**-1**
$\sin x$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**

$\cos(-8\pi)=\cos(0+(-8\pi))=\cos(0+2\times(-4)\pi)=\cos(0)=1$ Car : $\cos x=\cos(x+2k\pi)$

$\sin(-8\pi)=\sin(0+(-8\pi))=\sin(0+2\times(-4)\pi)=\sin(0)=0$ Car : $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ et $\tan(x+k\pi)=\tan x$

$\tan(-8\pi)=\tan(0+(-8\pi))=\tan(0)=0$ Car : $\tan(x+k\pi)=\tan x$

✓ On a : $\frac{5\pi}{4}=\frac{4\pi+\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

$\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=-\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice09 : Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$ $\quad B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$ $\quad F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution : On a donc : $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$$

$$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

Donc : $C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

Exercice10 : Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ On pose : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)^2-1\right]$

1) Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

2) Montrer que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

3) Montrer que : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculer : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Solution : 1) On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x)+\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[(0+1)^2-1\right]=\frac{1}{2}\times 0=0$

$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)+\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)^2-1\right]$

$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x)+\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x))^2+2\cos(2x)\sin(2x)+(\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x))^2+(\sin(2x))^2+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$ or : $(\cos X)^2+(\sin X)^2=1$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[1+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}2\cos(2x)\sin(2x)=\cos(2x)\sin(2x)$

3) Montrons que : $A(-x)=-A(x)$

On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=\cos(-2x)\times\sin(-2x)$ or : $\cos(-X)=\cos X$ et $\sin(-X)=-\sin X$

Donc : $A(-x)=-\cos(2x)\times\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculons : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$: On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

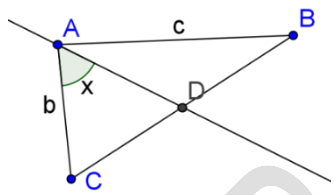
Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ or : $\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin X$ et $\sin\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=\cos X$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin(2x)\cos(2x)$

Donc : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(2x)\sin(2x)-\sin(2x)\cos(2x)=0$

Exercice11 : Soit (AD) une médiane du triangle ABC tel que : $\widehat{BAD}=x$ (la figure)
Et $AC=b$ et $BC=a$ et $AB=c$

Montrer que : $\sin(A-x)=\frac{c}{b}\sin x$



Solution : On a : $x+\widehat{BDA}+B=\pi$ et $A+B+C=\pi$

Donc : $x+\widehat{BDA}+B=A+B+C$ c'est-à-dire : $\widehat{BDA}=A+C-x$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABD on a : $\frac{\sin(A+C-x)}{c}=\frac{\sin(x)}{\frac{a}{2}}$ (1)

D'après la loi des sinus dans le triangle ADC on a : $\frac{b}{\sin(\pi-\widehat{BDA})}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin(A-x)}$

C'est-à-dire : $\frac{b}{\sin\widehat{BDA}}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin(A-x)}$

Donc : $\sin(A-x)=\frac{a}{2b}\sin(A+C-x)$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $\sin(A-x)=\frac{c}{b}\sin x$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ d) $2\cos x-4=0$ e) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$

Solution : On rappelle les valeurs remarquables des sinus et cosinus :

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (°)	0	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos^2 x-\frac{1}{2}=0$

Équivaut à : $\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Équivaut à : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x=-\cos\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,;-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\} avec\ k\in\mathbb{Z}$

d) $2\cos x-4=0$ Équivaut à : $2\cos x=4$

Équivaut à : $\cos x=2\notin[-1;1]$

Alors l'équation $\cos x=2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

e) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ Équivaut à : $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ car : $-\cos x=\cos(\pi-x)$

Équivaut à : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad x+\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad x=-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad ou \quad x=-\frac{11\pi}{12}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi;\frac{5\pi}{12}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x=-\frac{1}{2}$ e) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$

Solution : a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\sin x=-\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ Équivaut à : $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

Équivaut à : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

Équivaut à :

Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{7\pi}{12}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice14 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\pi - \frac{\pi}{4} < 2k\pi \le \pi - \frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{4} < 2k\pi \le \frac{3\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{4} \le 2k \le \frac{3}{4}$ Équivaut à : $-\frac{5}{8} \le k \le \frac{3}{8}$

C'est-à-dire : $-0,6... \le k \le 0,37...$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 0$

Pour $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$

b) Encadrement de $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$

Donc : $-1 < \frac{3}{4} + 2k \le 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{3}{4} < 2k \le 1 - \frac{3}{4}$

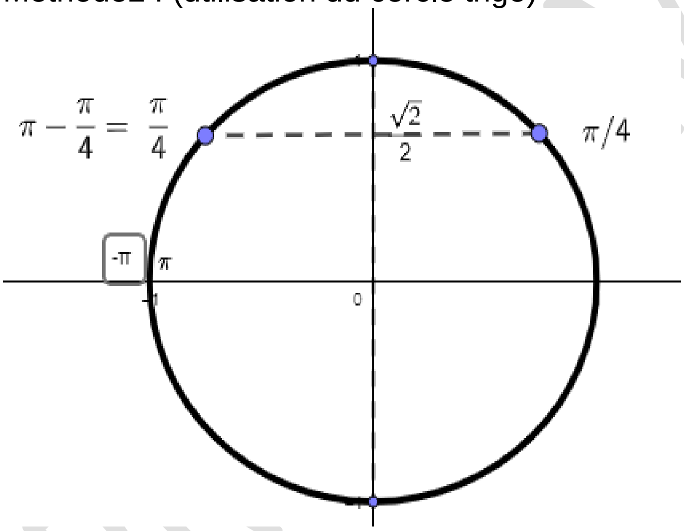
Donc : $-\frac{7}{4} < 2k \le \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{8} < k \le \frac{1}{8}$

Donc $-0,8... \le k \le 0,12...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$

Exercice15 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi, \pi\right]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 - \frac{5}{6} < 2k \leq 1 - \frac{5}{6}$

Donc : $-\frac{11}{6} < 2k \leq \frac{1}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{11}{12} < k \leq \frac{1}{12}$

Donc $-0,9... \leq k \leq 0,08...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{5\pi}{6}$

b) Encadrement de $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

Donc : $-1 < -\frac{5}{6} + 2k \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 + \frac{5}{6} < 2k \leq 1 + \frac{5}{6}$

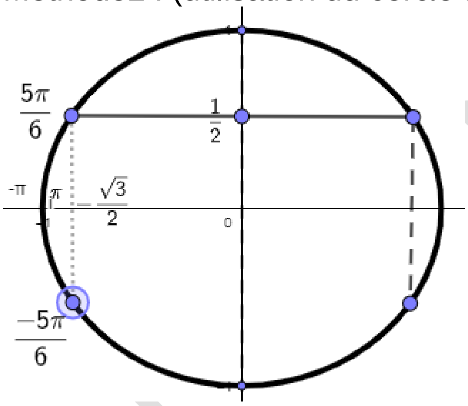
Donc : $-\frac{1}{6} < 2k \leq \frac{11}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{12} < k \leq \frac{11}{12}$

Donc $-0,... \leq k \leq 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{5\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Exercice16 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Résoudre dans $\left]-\pi ; \pi\right]$ l'équation suivante : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution :1) On a : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ avec ; $k \in \mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{6}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$: on obtient $x=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{6}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont : $x_1=-\frac{5\pi}{6}$ et $x_2=\frac{\pi}{6}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice17 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\left[0\,;2\pi\right]$

Solution :1) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ devient : $2t^2-9t-5=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$

Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc l'équation : $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)Encadrement de : $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$:

$0\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq2\pi$ Équivaut à : $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08\leq k\leq1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$ par suite : $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq2\pi$ Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $-0,5\leq k\leq0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

Exercice18 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 2) $\cos x-\sin x=0$ 3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$

Solution : Règles :
Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

1) $\sin x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ Équivaut à : $\sin x=0$ ou $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Équivaut à : $x=k\pi$ *ou* $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=k\pi$ *ou* $2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=k\pi$ *ou* $2x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=k\pi$ *ou* $x=\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{k\pi;\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $\cos x-\sin x=0$

$\cos x-\sin x=0$ Équivaut à : $\cos x=\sin x$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \quad ou \quad x=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad \frac{\pi}{2}=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad ou \quad \frac{1}{4}=k(impossible)$ car $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin 2x$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sin(-2x)$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

Équivaut à : $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}=-\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad \frac{5x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}-\frac{4k\pi}{3} \quad ou \quad x=-\frac{\pi}{5}-\frac{4k\pi}{5}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3};-\frac{\pi}{5}+\frac{4k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice19 : Résoudre dans $[0,2\pi]$ de l'équation : $\cos 3x=-\cos\frac{\pi}{7}$

Solution : $\cos 3x=-\cos\frac{\pi}{7}$ Équivaut à : $\cos 3x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $\cos 3x=\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Équivaut à : $3x=\frac{6\pi}{7}+2k\pi$ ou $3x=-\frac{6\pi}{7}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$

a) Encadrement de : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$: $0\leq\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}\leq 2\pi$

Donc : $0\leq\frac{2}{7}+\frac{2k}{3}\leq 2$ c'est-à-dire : $0-\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\leq 2-\frac{2}{7}$

Donc : $-\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\leq\frac{12}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{6}{7}<2k\leq\frac{36}{7}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{7}<k\leq\frac{18}{7}$

Donc $-0,4...\leq k\leq 2,5...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$ on remplace on trouve :Si $k=0$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}$

Si $k=1$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{20\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{34\pi}{21}$

b) Encadrement de : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}$: $0\leq-\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{3}\leq 2\pi$

Donc : $0\leq-\frac{2}{7}+\frac{2k}{3}\leq 2$ c'est-à-dire : $0+\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\leq 2+\frac{2}{7}$

Donc : $\frac{2}{7}<\frac{2k}{3}\leq\frac{16}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{6}{7}<2k\leq\frac{48}{7}$ c'est-à-dire : $\frac{3}{7}<k\leq\frac{24}{7}$

Donc $0,4...\leq k\leq 3,4...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$ on remplace on trouve :Si $k=1$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{21}$

Si $k=2$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{3}=\frac{22\pi}{21}$

Si $k=3$ alors : $x=-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{3}=\frac{36\pi}{21}=\frac{12\pi}{7}$

Donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{2\pi}{7};\frac{20\pi}{21};\frac{22\pi}{21};\frac{34\pi}{21};\frac{12\pi}{7}\right\}$

Exercice20 : 1) Montrer que : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0 \quad (E)$

3) Placer sur le cercle trigonométrique munie d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les solutions de l'équation (E).

4) Soient A ; B ; C les points trouvés dans la question 3)
Montrer que : ABC est un triangle équilatéral

Solution :1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=2(\cos x)^2-\cos(x+10\pi+\pi)-1$

$=2(\cos x)^2-\cos(x+\pi)-1=2(\cos x)^2+\cos x-1$

Et on a $(\cos x+1)(2\cos x-1)=2(\cos x)^2+\cos x-1$

Donc : $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$ si $x\in\mathbb{R}$

2) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+11\pi)-1=0$ Équivaut à : $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $2\cos x-1=0$ c'est-à-dire : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos x = -1$ ou $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x = (2k+1)\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

• Encadrement de $(2k+1)\pi$: $-\pi < (2k+1)\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < 2k+1 \leq 1$ c'est-à-dire : $-2 < 2k \leq 0$ équivaut à : $-1 < k \leq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et on trouve $x_1 = \pi$

• Encadrement de $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $-1 < \frac{1}{3} + 2k \leq 1$

Donc $\frac{-4}{3} < 2k \leq \frac{2}{3}$ cad $\frac{-2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et on trouve $x_2 = \frac{\pi}{3}$

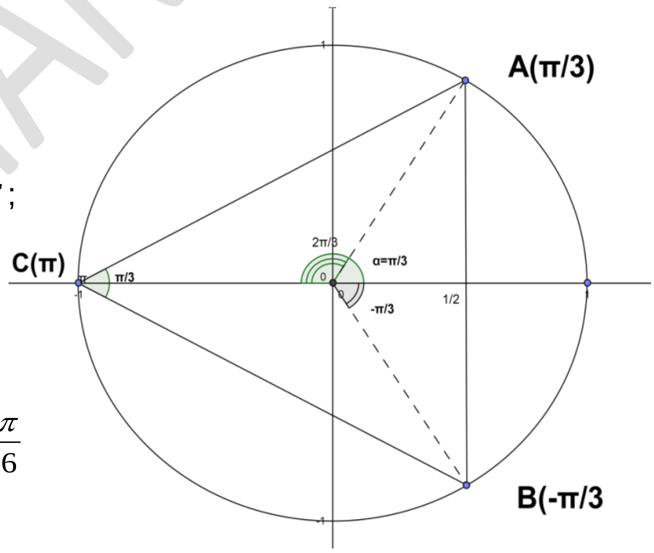
• Encadrement de $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$ équivaut à : $\frac{-2}{3} < 2k \leq \frac{4}{3}$

C'est-à-dire : $\frac{-1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ et on trouve $x_3 = -\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left\{\pi; \frac{\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}\right\}$



3) Voir figure.

4) Montrons que : ABC est un triangle équilatéral :

On a : $OA = OB = OC$ donc les triangles : OAB ; OAC ; OBC sont des triangles isocèles de sommet O

Exemple dans le triangle OAB on a : $AOB = \frac{2\pi}{3}$

Donc : $OAB = OBA = \frac{\pi}{6}$

De même on déduit que : $OBC = OCB = OAC = OCA = \frac{\pi}{6}$

Équivaut à $ABC = BAC = ACB = \frac{\pi}{3}$

Par suite : ABC est un triangle équilatéral

Exercice21 : Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x < \frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

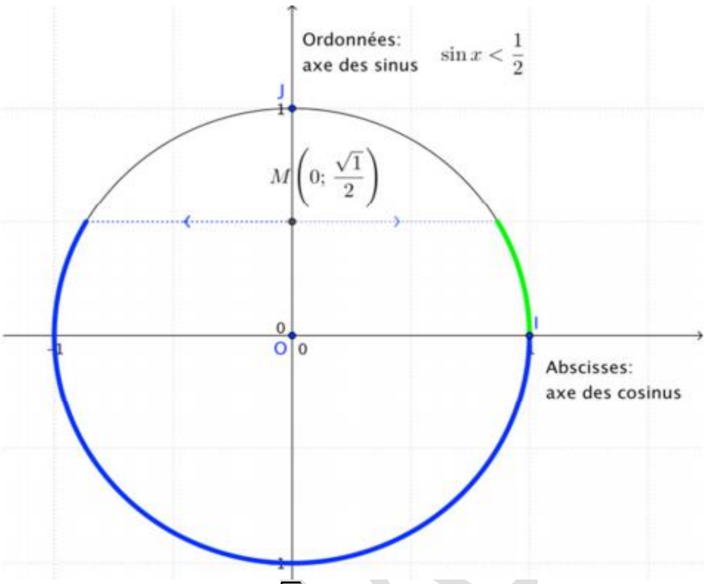
Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0\,;2\pi]$

On trouve que : $\sin x<\frac{1}{2}$ Équivaut à :

$x\in\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$

Donc : $S=\left]0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$



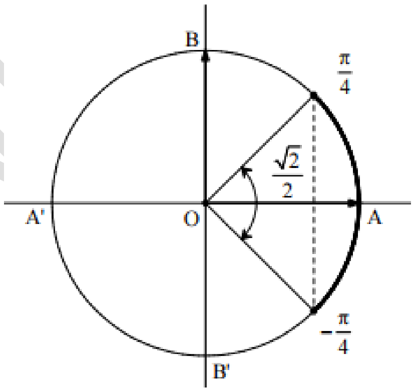
Exercice22 : Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in]-\pi;\pi]$ alors : $x=-\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{\pi}{4}$

$\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x\geq\cos\frac{\pi}{4}$



En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $S=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

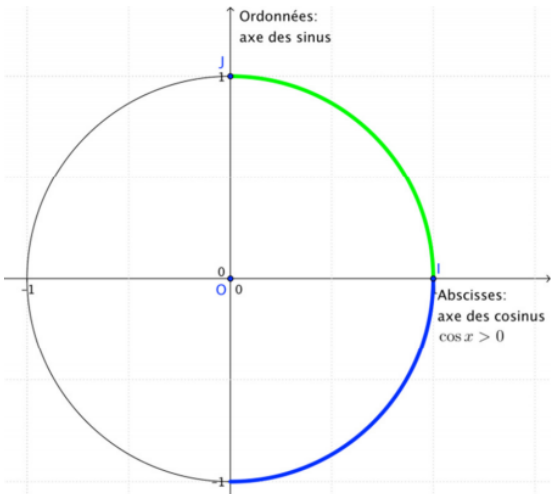
Exercice23 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x>0$

Solution : $\cos x=0$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{3\pi}{2}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et 0 dans $[0;2\pi]$

Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$



Exercice24 : Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \leq -\frac{1}{2}$

Solution :

1iér étape : On pose : $X = 2x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi \leq 2x \leq \pi$

Équivaut à : $-\pi \leq X \leq \pi$

$\sin X = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin X = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

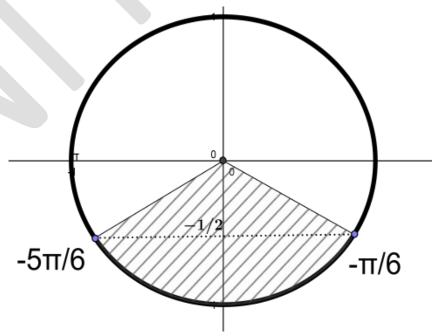
Équivaut à : $X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $X = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $X \in]-\pi;\pi]$ alors : $X = -\frac{\pi}{6}$ ou $X = -\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$:

$\begin{cases} \sin X \leq -\frac{1}{2} \\ -\pi \leq X \leq \pi \end{cases}$ Équivaut à : $X \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$



2iér étape : Or : $X = 2x$

$X \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$ Équivaut à : $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$ Donc : $S = \left[-\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12}\right]$

Exercice25 : Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

Solution :

• L'inéquation $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [-\pi\,;\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $3\tan x - \sqrt{3} = 0$

On a $3\tan x - \sqrt{3} = 0$ Équivaut à : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

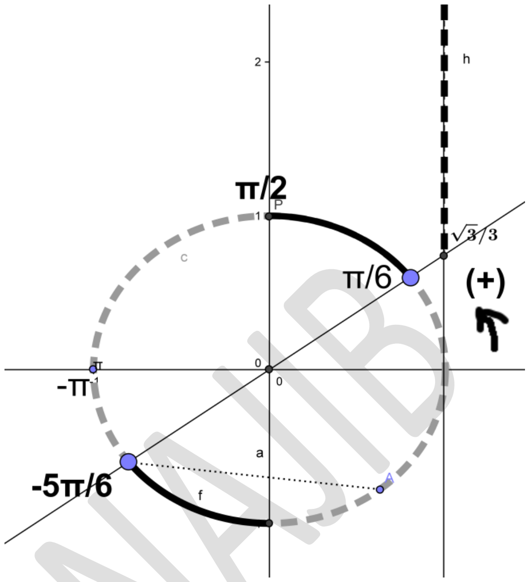
On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in\left[-\pi\,;\pi\right]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $\left[-\pi\,;\pi\right]$



On trouve que : $\tan x\succ\frac{\sqrt{3}}{3}$

Équivaut à : $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice26 : 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $\left[0\,;2\pi\right]$

b) Résoudre dans $\left[0\,;2\pi\right]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$

2) Résoudre dans $\left[0\,;\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\left(2\cos x-1\right)\left(\tan x+1\right)\geq 0$

Solution :1) a) On pose $t=\sin x$ et l'équation $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ devient : $2t^2-9t-5\leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-9t-5$:

Calcul du discriminant : Δ = (-9) ^{2} – 4 x 2 x (-5) = 121

Les racines sont : $t_1=\frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2}=5$ Donc $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $\sin x=5$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc l'équation $\sin x=5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq-\frac{1}{6}+2k\leq 2$ équivaut à : $\frac{1}{12}\leq k\leq\frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08\leq k\leq 1,02$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$: $0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{6}+2k\leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $-0,5\leq k\leq 0,41$ et $k\in\mathbb{Z}$

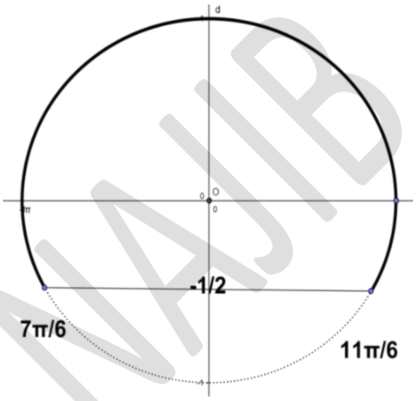
Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2=\frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0\,;\,2\pi]}=\left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x-9\sin x-5\leq 0$ ssi $2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$

Or on sait que $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-1\leq\sin x\leq 1<5$ c'est-à-dire : $\sin x-5<0$

Puisque $\sin x-5<0$ et $2>0$ alors $2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)(\sin x-5)\leq 0$



Équivaut à : $\sin x+\frac{1}{2}\geq 0$

Équivaut à : $\sin x\geq -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x\geq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

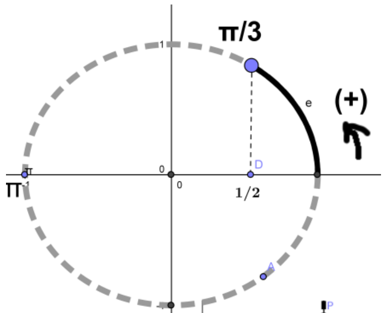
L'arc en trait plein correspond à tous les points $M(x)$

Tel que : x vérifie $\sin x\geq -\frac{1}{2}$

Donc $S=\left[0;\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

2) l'inéquation $(2\cos x-1)(\tan x+1)\geq 0$ est définie dans $[0\,;\pi]$ si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

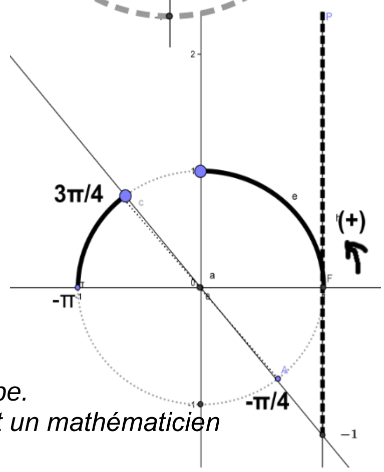
Donc : $D=[0\,;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



$2\cos x-1\geq 0$ Équivaut à : $\cos x\geq\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x\geq\cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x+1\geq 0$ Équivaut à : $\tan x\geq -1$ si et seulement si : $\tan x\geq\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\tan x+1$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
produit		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	



Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien