

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes

Exercice01 : 1) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants : a) $-x^2 + 6x - \frac{17}{2}$ b)

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$$

2) En déduire une résolution des équations suivantes : a) $-x^2 + 6x - \frac{17}{2} = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = 0$

Solution : 1) a) Pour écrire $-x^2 + 6x - \frac{17}{2}$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $-\left(x^2 - 6x + \frac{17}{2}\right)$

Puis on doit transformer : $x^2 - 6x + \frac{17}{2}$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2 - 6x + \frac{17}{2}$ (x^2 correspond à a^2 et $-6x$ à $2ab$)

Donc : $a = x$ et $2ab = -6x$ c'est-à-dire : $b = -3$.

$$\text{Donc : } x^2 - 6x + \frac{17}{2} = (x-3)^2 - \dots + \frac{17}{2}$$

Si on développe $(x-3)^2$ on obtient $x^2 - 6x + 9$

Pour avoir seulement $x^2 - 6x$ on doit retrancher 9.

$$\text{Donc : } x^2 - 6x + \frac{17}{2} = (x-3)^2 - 3^2 + \frac{17}{2} = (x-3)^2 - 9 + \frac{17}{2} = (x-3)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } -x^2 + 6x - \frac{17}{2} = -1 \left[(x-3)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Donc : } -x^2 + 6x - \frac{17}{2} = -1(x-3)^2 + \frac{1}{2}$$

$$-1(x-3)^2 + \frac{1}{2} : \text{ est la forme canonique de } -x^2 + 6x - \frac{17}{2}$$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $-x^2 + 6x - \frac{17}{2}$

Calculons le discriminant de : $-x^2 + 6x - \frac{17}{2} = ax^2 + bx + c$: $a = -1$; $b = 6$; $c = -\frac{17}{2}$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (6)^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{17}{2}\right) = 36 - 34 = 2$$

La forme canonique de : $ax^2 + bx + c$ en générale est :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x - \alpha\right)^2 + \beta \right] \text{ Avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$$

La forme canonique de $-x^2 + 6x - \frac{17}{2}$ est:

$$-x^2 + 6x - \frac{17}{2} = -1 \left[(x - \alpha)^2 + \beta \right] \quad \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{2}{4 \times (-1)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc : $-x^2 + 6x - \frac{17}{2} = -1 \left[(x - 3)^2 - \frac{1}{2} \right]$: La forme canonique

1) b) Pour écrire $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le

coefficient qui est devant x^2 : On obtient $\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 18)$

Puis on doit transformer : $x^2 - 8x + 18$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2 - 8x + 18$ (x^2 correspond à a^2 et $-8x$ à $2ab$)

Donc : $a = x$ et $2ab = -8x$ c'est-à-dire : $b = -4$.

Donc : $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 - \dots + 18$

Si on développe $(x - 4)^2$ on obtient $x^2 - 8x + 16$

Pour avoir seulement $x^2 - 8x$ on doit retrancher 16.

$$\text{Donc : } x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 - 4^2 + 18 = (x - 4)^2 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = \frac{1}{2} \left[(x - 4)^2 + 2 \right] \quad \text{c'est-à-dire : } \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$$

$\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$ est la forme canonique de $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$

Calculons le discriminant de : $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = ax^2 + bx + c$: $a = \frac{1}{2}$; $b = -4$; $c = 9$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 9 = 16 - 18 = -2$$

La forme canonique de : $ax^2 + bx + c$ en générale est :

$$ax^2 + bx + c = a \left[(x - \alpha)^2 + \beta \right] \quad \text{Avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$$

La forme canonique de $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$ est:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = \frac{1}{2} \left[(x - \alpha)^2 + \beta \right] \quad \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times \frac{1}{2}} = 4 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{-2}{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Donc : $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = \frac{1}{2} \left[(x - 4)^2 + 2 \right]$: La forme canonique

$$2) a) -x^2 + 6x - \frac{17}{2} = 0 \quad \text{Signifie que : } -1(x - 3)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Signifie que : } -1(x - 3)^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{Signifie que : } (x - 3)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Signifie que : } x - 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x - 3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Signifie que : } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

2)b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 = 0$ Signifie que : $\frac{1}{2}(x-4)^2 + 1 = 0$

Signifie que : $\frac{1}{2}(x-4)^2 = -1$

Signifie que : $(x-4)^2 = -2$ impossible

Donc : $S = \emptyset$

Exercice02 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$ b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

3) Factoriser les expressions suivantes : a) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$ b) $x^4 - 3x^2 - 4$

Solution : 1) a) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$; $a = 1$; $b = -1$; $c = \frac{1}{4}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation : $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ admet une solution double : $x = \frac{-(-1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

1)b) $x^2 - 3x - 4 = 0$ On a : $a = 1$; $b = -3$; $c = -4$

$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$

Donc : l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-(-3) + 5}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-(-3) - 5}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

Donc : $S = \{-1; 4\}$

2)a) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$ signifie que : $(x^2)^2 - x^2 + \frac{1}{4} = 0$; On pose : $X = x^2$

Donc : l'équation devient : $X^2 - X + \frac{1}{4} = 0$; $\Delta = 0$

$X = \frac{-(-1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ et on a : $X = x^2$

Donc : $x^2 = \frac{1}{2}$ qui signifie que : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

2)b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ Signifie que : $(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$; On pose : $X = x^2$

Donc l'équation devient : $X^2 - 3X - 4 = 0$; $\Delta = 25 > 0$

Donc l'équation a deux solutions : $X_1 = 4$ et $X_2 = -1$

Donc : $x^2 = 4$ et $x^2 = -1$ (impossible)

Donc : $x = 2$ ou $x = -2$ Donc : $S = \{-2; 2\}$

3)a) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = (x^2)^2 - x^2 + \frac{1}{4}$ On pose : $X = x^2$

Donc : le trinôme devient : $X^2 - X + \frac{1}{4}$; $a=1$; $b=-1$; $c=\frac{1}{4}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme : $X^2 - X + \frac{1}{4}$ a une racine double :

La racine double de : $X^2 - X + \frac{1}{4}$ est : $X = \frac{-(-1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

Donc on a : $X^2 - X + \frac{1}{4} = 1 \left(X - \frac{1}{2} \right)^2$ et comme : $X = x^2$

Alors : $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 1 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 3x^2 - 4$ On pose : $X = x^2$

Donc : le trinôme devient : $X^2 - 3X - 4$

Le trinôme : $X^2 - 3X - 4$ a deux racines : $X_1 = \frac{-(-3) + 5}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{-(-3) - 5}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

$X^2 - 3X - 4 = 1(X - 4)(X + 1)$ et comme : $X = x^2$

Alors : $x^4 - 3x^2 - 4 = 1(x^2 - 4)(x^2 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$

Exercice03 : Soit le trinôme $2019x^2 - 2020x + 1$

a) Vérifier que 1 est racine du trinôme

b) Trouver l'autre racine du trinôme

Solution : a) $2019 \times 1^2 - 2020 \times 1 + 1 = 2019 - 2020 + 1 = 2020 - 2020 = 0$ donc $x_1 = 1$

b) $a = 2019$, $b = -2020$ et $c = 1$

On a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $1 \times x_2 = \frac{1}{2019}$ c'est-à-dire : $x_2 = \frac{1}{2019}$

Exercice04 : Donner une équation du second degré qui a pour solutions : α et β dans les cas suivants :

1) $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ 2) $\alpha = -1$ et $\beta = \sqrt{2}$ 3) $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{3}$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de

l'équation : $x^2 - sx + p = 0$ avec : $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$

1) On a : $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ solutions de l'équation du second degré donc :

$x^2 - (1 + (-2))x + 1 \times (-2) = 0$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

2) On a : $\alpha = -1$ et $\beta = \sqrt{2}$ solutions de l'équation du second degré donc :

$x^2 - (-1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} \times (-1) = 0$

C'est-à-dire : $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

3) On a : $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{3}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2 - \left(\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)x + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ signifie que : $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

C'est-à-dire : $6x^2 - x - 1 = 0$

Exercice05 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-3} = -x+5$

Solution : Remarque : La relation $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-3 \geq 0$ Signifie que : $x \geq 3$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [3, +\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d'élever au carré.

$\sqrt{x-3} = -x+5$ Signifie que : $\sqrt{x-3}^2 = (-x+5)^2$ et $-x+5 \geq 0$

Signifie que : $x-3 = x^2 - 10x + 25$ et $-x \geq -5$

Signifie que : $x^2 - 11x + 28 = 0$ et $x \leq 5$

Le discriminant de : $x^2 - 11x + 28 = 0$ est : $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 28 = 121 - 112 = 9 > 0$ et ses solutions sont :

$x_1 = \frac{11 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4 \in D_E$ et $x_2 = \frac{11 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{14}{2} = 7 \notin D_E$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ Signifie que : $x = 4 \in D_E$

Par conséquent : $S = \{4\}$

Exercice06 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0$; (E)

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0$

Le discriminant de : $x^2 - 2(m+1)x + 4 = 0$ est : $\Delta = [-2(m+1)]^2 - 4 \times 1 \times 4 = (2m+2)^2 - 16$

$\Delta = (2m+2)^2 - 4^2 = (2m+2-4)(2m+2+4) = (2m-2)(2m+6) = 4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta = 4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$m-1$	-	-	0	+
$m+3$	-	0	+	+
$(m-1)(m+3)$	+	0	-	+

1ère cas : $m \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$ on a ; $\Delta = 4(m-1)(m+3) > 0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$x_1 = \frac{2(m+1) - \sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (m+1) - \sqrt{(m-1)(m+3)}$ et

$x_2 = \frac{2(m+1) + \sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2} = (m+1) + \sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S = \left\{ (m+1) - \sqrt{(m-1)(m+3)}; (m+1) + \sqrt{(m-1)(m+3)} \right\}$

2^{ème} cas : $m \in]-3;1[$ on a $\Delta = 4(m-1)(m+3) < 0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \emptyset$

3^{ème} cas : $m=1$: on a $\Delta = 4(1-1)(1+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2(m+1)}{2 \times 1} = m+1 = 2$

Donc : $S = \{2\}$

4^{ème} cas : $m=-3$: on a $\Delta = 4(-3-1)(-3+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2(m+1)}{2 \times 1} = -3+1 = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

Exercice07 : On considère l'équation : $(E_m) \quad x^2 - 2x + (2m-1) = 0$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation (E_m) admette deux solutions distinctes α et β

2) Déterminer la valeur du paramètre m pour que :

a) $\alpha \times \beta = -5$ b) $(\alpha-1) \times (\beta-1) = -10$ c) $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -42$

Solution : 1) C'est une équation du second degré : $\Delta_m = b^2 - 4ac = 4 - 4(2m-1) = 4 - 8m + 4 = 8 - 8m$

L'équation admet deux solutions distinctes α et β si et seulement si : $\Delta_m > 0$

Signifie que : $8 - 8m > 0$ c'est-à-dire : $m < 1$

2) Déterminons la valeur du paramètre m pour que : a) $\alpha \times \beta = -5$:

On sait que : $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m-1$

Donc : $2m-1 = -5$ qui signifie que : $2m = -4$ c'est-à-dire : $m = -2$

b) $(\alpha-1) \times (\beta-1) = -10$ signifie que : $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = -10$

Signifie que : $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -10$

Signifie que : $\alpha\beta = 2m-1$ et $\alpha + \beta = 2$

Donc : $2m-1-2+1 = -10$ signifie que : $2m = -8$ c'est-à-dire : $m = -4$

c) $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -42$ signifie que : $\alpha\beta(\alpha + \beta) = -42$

Or on sait que : $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha \times \beta = 2m-1$

Donc : $2(2m-1) = -42$ équivaut à : $2m-1 = -21$

Équivaut à : $2m = -20$ c'est-à-dire : $m = -10$

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice08 : Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm²?

Solution : Posons l ="la longueur du rectangle" et L ="la largeur du rectangle"

On doit résoudre le système :
$$\begin{cases} 2l + 2L = 56 \\ l \times L = 192 \end{cases}$$

Isolons L dans la première équation : On a : $2l + 2L = 56$ donc $2L = 56 - 2l$ c'est-à-dire : $L = \frac{56 - 2l}{2}$

Donc : $L = 28 - l$

Remplaçons maintenant cette valeur de L dans la deuxième équation.

$l \times L = 192$ Donc : $l \times (28 - l) = 192$

Donc : $28l - l^2 = 192$ Donc : $-l^2 + 28l - 192 = 0$: on obtient une équation du deuxième degré.

Calculons delta : $\Delta = 28^2 - 4 \times (-1) \times (-192) = 784 - 768 = 16$

L'équation admet donc deux solutions :

$$l_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28 - \sqrt{16}}{-2} = \frac{-28 - 4}{-2} = \frac{-32}{-2} = 16 \text{ Et } l_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28 + \sqrt{16}}{-2} = \frac{-28 + 4}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12$$

Les deux valeurs possibles pour la longueur sont 16 et 12.

Le produit de ces deux nombres vaut 192

Donc 16 et 12 correspondent bien à la longueur et à la largeur du rectangle.

La longueur de ce rectangle mesure donc 16 centimètres.

Exercice09 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'équation : $|x - 2| = 5$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ Graphiquement l'équation : $|x - 2| = 5$

Solution : 1) Résolvons notre équation algébriquement :

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité $|a| = |b|$ est équivalente à : $a = b$ ou $a = -b$

Cela découle du fait que par exemple $|5| = |-5|$

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

$$|x - 2| = 5 \text{ Signifie que : } x - 2 = 5 \text{ ou } x - 2 = -5$$

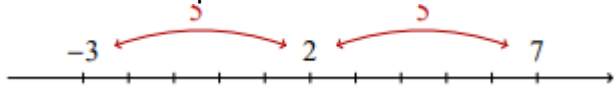
Signifie que : $x = 7$ ou $x = -3$

Donc : $S = \{-3; 7\}$

1) **Résolvons notre équation Graphiquement :**

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est égale à 5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous trouvons donc comme solution -3 et 7 .

Donc : $S = \{-3; 7\}$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1) \frac{-6x^2 - 9x - 3}{-x^2 + 8x - 17} > 0 \quad 2) -2x(x - 2)(x^2 - 8x + 16) > 0$$

Solution : Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

- Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$, et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) > 0$.

- Résolvez $f(x) = 0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

- Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

- Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

$$1) \frac{-6x^2 - 9x - 3}{-x^2 + 8x - 17} > 0$$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2 + 8x - 17 \neq 0$

Calculons son discriminant : $a = -1$; $b = 8$; $c = -17$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-17) = 64 - 68 = -4 < 0$$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2 - 9x - 3$

Calculons son discriminant : $a = -6 ; b = -9 ; c = -3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-9)^2 - 4 \times (-6) \times (-3) = 81 - 72 = 9 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{9}}{2a} = \frac{9 - 3}{2 \times (-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{9}}{2a} = \frac{9 + 3}{2 \times (-6)} = \frac{12}{-12} = -1$$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2 + 8x - 17$

Calculons son discriminant : $a = -1 ; b = 8 ; c = -17$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-17) = 64 - 68 = -4 < 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a = -1 < 0$ et $\Delta < 0$, alors : $-x^2 + 8x - 17 < 0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$C(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$D(x)$	$-$		$-$		$-$
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

2) $-2x(x-2)(x^2-8x+16) > 0$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16) = 0$ Signifie que : $x^2 - 8x + 16 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x = 0$

Signifie que : $x^2 - 8x + 16 = 0$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2 - 8x + 16$

Calculons son discriminant : $a = 1 ; b = -8 ; c = 16$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a = 1 > 0$ et $\Delta = 0$, alors : $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

La racine double est : $x_1 = \frac{8}{2 \times 1} = 4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16) = 0$ Signifie que : $x = 4$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$-2x$	+	0	-	-	-
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x^2 - 8x + 16$	+	+	+	0	+
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$	-	0	+	0	-

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16) > 0$ est : $S =]0; 2]$

Exercice11 : Vous avez 20 DH pour prendre un taxi. La course coûte 5 DH plus 2,50 DH par kilomètre. On désigne par m le nombre de kilomètres parcourus. Écrire une inéquation permettant de calculer à combien de kilomètres le taxi pourra vous conduire avec 20 DH

Corrigé : Soit m le nombre de kilomètres parcourus :

$$5 + 2,5m \leq 20 \Leftrightarrow 2,5m \leq 20 - 5 \Leftrightarrow 2,5m \leq 15 \Leftrightarrow m \leq \frac{15}{2,5} \Leftrightarrow m \leq 6$$

Avec 20 DH on pourra parcourir au maximum 6 kilomètres

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $|2x+1|=1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

3) Dédire des questions précédents les solutions du système :
$$\begin{cases} 3|2x+1| + y^2 = 5 \\ 2|2x+1| - 3y^2 = -4 \end{cases}$$

Solution : 1) $|2x+1|=1$ équivalent : $2x+1=1$ ou $2x+1=-1$

Équivalent : $2x=0$ ou $2x=-2$

Équivalent : $x=0$ ou $x=-1$

Donc : $S = \{-1; 0\}$

2) Par la méthode combinaison linéaire :

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.

On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x . Pour cela on va :

multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.

Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système :
$$\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 6x - 9y = -12 \end{cases}$$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x .

$$\begin{array}{rcl} 6x & + & 2y = 10 \\ -(6x & - & 9y = -12) \\ \hline & & 11y = 22 \\ \text{donc } & y & = 2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :

Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

La solution du système est donc : $S = \{(1, 2)\}$

3) Dédution des questions précédents des solutions du système :
$$\begin{cases} 3|2x+1| + y^2 = 5 \\ 2|2x+1| - 3y^2 = -4 \end{cases}$$

On pose : $\begin{cases} X = |2x+1| \\ Y = y^2 \end{cases}$ Donc on a : $\begin{cases} 3X + Y = 5 \\ 2X - 3Y = -4 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$

Donc : $|2x+1|=1$ et $y^2=2$

Donc : $(x=0 \text{ ou } x=-1)$ et $(y=-\sqrt{2} \text{ ou } y=\sqrt{2})$

Par suite : $S = \{(0, \sqrt{2}); (0, -\sqrt{2}); (-1, -\sqrt{2}); (-1, \sqrt{2})\}$

Exercice13 : Discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$$P(x) = (m^3 - m)x^3 - (m+1)x^2 + (m-1)x + 11$$

Solution : $P(x) = (m^3 - m)x^3 - (m+1)x^2 + (m-1)x + 11$

$m^3 - m = 0$ Signifie que : $m(m^2 - 1) = 0$

Signifie que : $m = 0$ ou $m^2 - 1 = 0$

Signifie que : $m = 0$ ou $m^2 = 1$

Signifie que : $m = 0$ ou $m = -\sqrt{1}$ ou $m = \sqrt{1}$

Signifie que : $m = 0$ ou $m = -1$ ou $m = 1$

• Si $m \neq -1$ et $m \neq 1$ et $m \neq 0$ alors : $m^3 - m \neq 0$ et par suite : $d^\circ P = 3$

• Si $m = 0$ alors : le polynôme devient : $P(x) = (0^3 - 0)x^3 - (0+1)x^2 + (0-1)x + 11$

c'est-à-dire : $P(x) = -x^2 - x + 11$ et par suite : $d^\circ P = 2$

• Si $m = 1$ alors : le polynôme devient : $P(x) = (1^3 - 1)x^3 - (1+1)x^2 + (1-1)x + 11$

c'est-à-dire : $P(x) = -2x^2 + 11$ et par suite : $d^\circ P = 2$

• Si $m = -1$ alors : le polynôme devient : $P(x) = ((-1)^3 - (-1))x^3 - ((-1)+1)x^2 + ((-1)-1)x + 11$

c'est-à-dire : $P(x) = -2x + 11$ et par suite : $d^\circ P = 1$

Exercice14 : Soit : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme P

2) Montrer que $P(x) = (x-1)Q(x)$ ou $Q(x)$ est un polynôme à déterminer

3) Montrer que -2 est racine du polynôme Q

4) En déduire une factorisation du polynôme P en polynômes de 1er degré

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

Solution : 1) On a $P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ on trouve : $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8)$ ①

Donc : $Q(x) = x^2 - 2x - 8$

3) On a : $Q(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$

Donc -2 est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

4) Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

On trouve : $Q(x) = (x+2)(x-4)$ ②

D'après ① et ② on a : $P(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$

5) $P(x) = 0$ signifie que $(x-1)(x+2)(x-4) = 0$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$

$P(x) = 0$ Signifie que $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

Donc : $S = \{-2; 1; 4\}$

Exercice15 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : (I) $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta = (m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta = 0$

2) Vérifier que : $\Delta_x = (m-1)(m+4)$ et $\Delta_y = -3(m-1)$

3) On suppose que : $m \neq 1$ et $m \neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : (2) $\begin{cases} -x + y = -2 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$

4) On suppose que : $m = 1$

a) Ecrire le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m = -5$

a) Ecrire le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution : 1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix} = (m+2) \times (m+2) - 9 \times 1 = (m+2)^2 - 3^2 = (m+2-3)(m+2+3) = (m-1)(m+5)$$

b) $\Delta = 0$ Signifie que : $(m-1)(m+5) = 0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta = 0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x = (m-1)(m+4)$ et $\Delta_y = -3(m-1)$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix} = (2+m)(1+m) - 6 = m^2 + 2m + m + 2 - 6 = m^2 + 3m - 4 \quad : a = 1, b = 3 ; c = -4$$

Le discriminant est : $b^2 - 4ac = 3^2 + 16 = 25 > 0$

$$\text{Donc : } m_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2a} = \frac{-3-5}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ et } m_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2a} = \frac{-3+5}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Donc : } \Delta_x = m^2 + 3m - 4 = 1(m - (-4))(m - 1) = (m+4)(m-1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(2+m) - 9(1+m) = 12 + 6m - 9m - 9 = 3 - 3m = -3(m-1)$$

3) On suppose que : $m \neq 1$ et $m \neq -5$; Dans ce cas : $\Delta \neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)} = \frac{m+4}{m+5} \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)} = -\frac{3}{m+5}$$

Donc : $S = \left\{ \left(\frac{m+4}{m+5}; -\frac{3}{m+5} \right) \right\}$

c) Dédution de la résolution du système : (2) $\begin{cases} -x + y = -2 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$

On pose : $m = -3$ dans : (I) $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$ on obtient : (2) $\begin{cases} -x + y = -2 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$

Et puisque: $-3 \neq 1$ et $-3 \neq -5$

Donc : $S = \left\{ \left(\frac{-3+4}{-3+5}; -\frac{3}{-3+5} \right) \right\}$ c'est-à-dire : $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right) \right\}$

4) On suppose que : $m = 1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m = 1$ alors $\Delta = 0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$: on trouve : (3) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$

Qui est équivalent à : (3) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Qui est équivalent à (3): $3x + y = 2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x + y = 2$

Ce système a une infinité de solutions

c) $3x + y = 2$ est équivalent a : $y = 2 - 3x$

Alors on a : $S = \{ (x; 2 - 3x) / x \in \mathbb{R} \}$

5) On suppose que : $m = -5$

a) Si $m = -5$ alors $\Delta = 0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$ on trouve : $\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 9x - 3y = 6 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) (3) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ impossible

Ce système n'a pas de solutions

c) $S = \emptyset$

Exercice16 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : (S) $\begin{cases} 4x + y - 1 \geq 0 \\ -3x + y + 2 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$

Solution : L'équation de la droite (D_1): $4x + y - 1 = 0$

L'équation de la droite (D_2): $-3x + y + 2 = 0$

L'équation de la droite (D_3): $x - 1 = 0$

Soit $O(0;0)$ On a $4 \times 0 + 0 - 1 \geq 0$ Équivalent à : $-1 \geq 0$

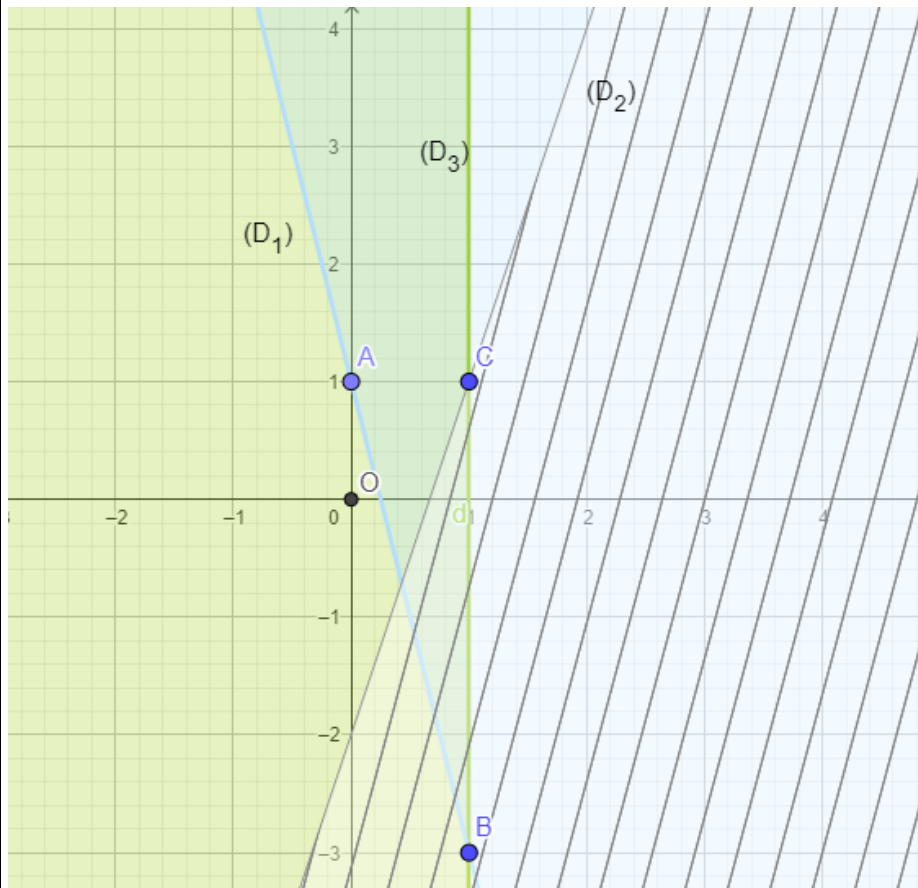
Donc : les coordonnées $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $4x + y - 1 \geq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $-3 \times 0 + 0 + 2 \leq 0$ Équivalent à : $2 \leq 0$

Donc : les coordonnées $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $-3x + y + 2 \leq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $0 - 1 \leq 0$ Donc : les coordonnées $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $x - 1 \leq 0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x; y)$ des points $M(x; y)$ du plan coloré avec les deux couleurs et hachurés (Voire la figure ci-dessous.)



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

