http://www.xriadiat.com **DL3 /O** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 :1) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants : a) $2x^2+12x+8$ b) $3x^2-6x+24$
2)En déduire une résolution des équations suivantes : a) $2x^2+12x+8=0$ b) $3x^2-6x+24=0$

Solution :1) a) Pour écrire $2x^2+12x+8$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $2\left(x^2+6x+4\right)$

Puis on doit transformer : x^2+6x+4 en factorisant avec les identités remarquables :
Pour cela on utilise les deux premiers termes de x^2+6x+4 (x^2 correspond à a² et $6x$ à 2ab)
Donc : $a=x$ et $2ab=6x$ c'est-à-dire : $b=3$.

Donc : $x^2+6x+4=\left(x+3\right)^2-...+4$

Si on développe $\left(x+3\right)^2$ on obtient x^2+6x+9

Pour avoir seulement x^2+6x on doit retrancher 9.

Donc : $x^2+6x+4=\left(x+3\right)^2-3^2+4=\left(x+3\right)^2-9+4=\left(x+3\right)^2-5$

Donc : $2x^2+12x+8=2\left[\left(x+3\right)^2-5\right]$

Donc : $2x^2+12x+8=2\left(x+3\right)^2-10$

$2\left(x+3\right)^2-10$ est la forme canonique de $2x^2+12x+8$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $2x^2+12x+8$
Calculons le discriminant de : $2x^2+12x+8=ax^2+bx+c$: $a=2$; $b=12$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(12\right)^2-4\times 2\times\left(8\right)=144-64=80$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x-\alpha\right)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $2x^2+12x+8$ est:

$2x^2+12x+8=2\left[\left(x-\alpha\right)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{2\times 2}=-3$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}=-\dfrac{80}{4\times 2^2}=-\dfrac{80}{16}=-5$

Donc : $2x^2+12x+8=2\left[\left(x+3\right)^2-5\right]$: La forme canonique

b) Pour écrire $3x^2-6x+24$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $3\left(x^2-2x+8\right)$

Puis on doit transformer : x^2-2x+8 en factorisant avec les identités remarquables :
Pour cela on utilise les deux premiers termes de x^2-2x+8 (x^2 correspond à a² et $-2x$ à 2ab)
Donc : $a=x$ et $2ab=-2x$ c'est-à-dire : $b=-1$.

Donc : $x^2-2x+8=\left(x-1\right)^2-...+8$

Si on développe $(x-1)^2$ on obtient x^2-2x+1

Pour avoir seulement x^2-2x on doit retrancher 1.

Donc : $x^2-2x+8=(x-1)^2-1^2+8=(x-1)^2-1+8=(x-1)^2+7$

Donc : $3x^2-6x+24=3\left[(x-1)^2+7\right]$

Donc : $3x^2-6x+24=3(x-1)^2+21$

$3(x-1)^2+21$ est la forme canonique de $3x^2-6x+24$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $3x^2-6x+24$

Calculons le discriminant de: $3x^2-6x+24=ax^2+bx+c$: $a=3$; $b=-6$; $c=24$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-6)^2-4\times 3\times(24)=36-288=-252$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $3x^2-6x+24$ est:

$3x^2-6x+24=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2\times 3}=1$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a^2}=-\dfrac{-252}{4\times 3^2}=+\dfrac{252}{36}=7$

Donc : $3x^2-6x+24=3\left[(x-1)^2+7\right]$:

La forme canonique de : $3x^2-6x+24$ est $3(x-1)^2+21$

2) a) $2x^2+12x+8=0$ Signifie que : $2(x+3)^2-10=0$

Signifie que : $2(x+3)^2=10$

Signifie que : $(x+3)^2=5$

Signifie que : $x+3=\sqrt{5}$ ou $x+3=-\sqrt{5}$

Signifie que : $x=\sqrt{5}-3$ ou $x=-\sqrt{5}-3$

Donc : $S=\left\{-\sqrt{5}-3;\sqrt{5}-3\right\}$

2)b) $3x^2-6x+24=0$ Signifie que : $3\left[(x-1)^2+7\right]=0$

Signifie que : $(x-1)^2+7=0$

Signifie que : $(x-1)^2=-7$ impossible

Donc : $S=\varnothing$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x)=0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x)=x^2-5x+6$ b) $P(x)=2x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{18}$ c) $P(x)=5x^2-3x+1$

Solution : a) $P(x)=x^2-5x+6$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-5x+6=0$: $a=1$; $b=-5$; $c=6$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1}=\dfrac{4}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1}=\dfrac{6}{2}=3$ donc : $S=\{2;3\}$

Et le trinôme $P(x)=x^2-5x+6$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

PROF. ATMANI NAJIB

C'est-à-dire : $x^2-5x+6=1(x-1)(x-2)=(x-1)(x-2)$

b) $P(x)=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}=0$: $a=2$; $b=-\frac{2}{3}$; $c=\frac{1}{18}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\times 2\times\frac{1}{18}=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{2}{3}}{2\times 2}=\frac{1}{6}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$ et le trinôme $P(x)=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)^2$

$2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}=2\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$

c) $P(x)=5x^2-3x+1$

Calculons le discriminant de l'équation $5x^2-3x+1=0$: $a=5$; $b=-3$; $c=1$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-3)^2-4\times 5\times 1=9-20=-11<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et le trinôme $P(x)=5x^2-3x+1$ ne peut pas être factorisée

Exercice03 : 1) Résoudre les équations : a) $|3x-2|=6$ b) $|-3x-1|=-3$ c) $|3x+1|=|4x-2|$

2) Résoudre les inéquations : a) $|4x-7|\le 2$ b) $|8x+3|\ge\frac{1}{4}$ c) $1\le|6x-3|\le 4$

Corrigé : 1) a) Résolution de l'équation : $|3x-2|=6$

On a les équivalences suivantes :

$|3x-2|=6$ Signifie que : $3x-2=6$ ou $3x-2=-6$

Signifie que : $3x=8$ ou $3x=-4$

Signifie que : $x=\frac{8}{3}$ ou $x=-\frac{4}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-3x-1|=-3$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative

Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x+1|=|4x-2|$ Signifie que : $3x+1=4x-2$ ou $3x+1=-(4x-2)$

Signifie que : $-x=-3$ ou $3x+1=-4x+2$

Signifie que : $x=3$ ou $7x=1$

Signifie que : $x=3$ ou $x=\frac{1}{7}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{7};3\right\}$

5)a) Résolution de l'inéquation : $|4x-7| \leq 2$

Règle : $|x-a| \leq r$ est équivalente à **:** $-r \leq x-a \leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|4x-7| \leq 2$ Signifie que : $-2 \leq 4x-7 \leq 2$

Signifie que : $-2+7 \leq 4x-7+7 \leq 2+7$

Signifie que : $5 \leq 4x \leq 9$

Signifie que : $\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{9}{4}$

Donc : $S = \left[\frac{5}{4}; \frac{9}{4}\right]$

b) Résolution de l'inéquation : $|8x+3| \geq \frac{1}{4}$

Règle : $|x-a| > r$ **est équivalente à :** $x-a \geq r$ ou $x-a \leq -r$ avec $r>0$

$|8x+3| \geq \frac{1}{4}$ Signifie que : $8x+3 \geq \frac{1}{4}$ ou $8x+3 \leq -\frac{1}{4}$

Signifie que : $8x \geq \frac{1}{4}-3$ ou $8x \leq -\frac{1}{4}-3$

Signifie que : $8x \geq -\frac{11}{4}$ ou $8x \leq -\frac{13}{4}$

Signifie que : $x \geq -\frac{11}{32}$ ou $x \leq -\frac{13}{32}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{13}{32}\right] \cup \left[-\frac{11}{32}; +\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $1 \leq |6x-3| \leq 4$

$2 \leq |10x+2| \leq 5$ Signifie que : $|6x-3| \leq 4$ et $|6x-3| \geq 1$

- Résolution de l'inéquation : $|6x-3| \leq 4$

$|6x-3| \leq 4$ Signifie que : $-4 \leq 6x-3 \leq 4$

Signifie que : $-4+3 \leq 6x-3+3 \leq 4+3$

Signifie que : $-1 \leq 6x \leq 7$

Signifie que : $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{7}{6}$

Donc : $S_1 = \left[-\frac{1}{6}; \frac{7}{6}\right]$

- Résolution de l'inéquation : $|6x-3| \geq 1$

$|6x-3| \geq 1$ Signifie que : $6x-3 \geq 1$ ou $6x-3 \leq -1$

Signifie que : $6x \geq 4$ ou $6x \leq 2$

Signifie que : $x \geq \frac{4}{6}$ ou $x \leq \frac{2}{6}$

Signifie que : $x \geq \frac{2}{3}$ ou $x \leq \frac{1}{3}$

Donc : $S_2 = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=\left[-\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right]\cap\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[\right)$

Exercice04 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-5x^2+6x+8\geq 0$ b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$

c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$ d) $-\frac{1}{2}x^2+x-4<0$

Solution : a) $-5x^2+6x+8\geq 0$

Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2+6x+8=0$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
$-5x^2+6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left[-\frac{4}{5};2\right]$

b) $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}>0$ Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$:

$a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times 2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$

c) $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}<0$

Calculons le discriminant de l'équation $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{8}{3}}{2\times16}=\frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$	$+$	0	$+$

Donc : $S=\varnothing$

d) $-\frac{1}{2}x^2+x-4<0$

Calculons le discriminant de l'équation $-\frac{1}{2}x^2+x-4=0$: $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$

Exercice05 : le trinôme (E) : $P(x)=-3x^2+\sqrt{3}x+3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=-3$: **et et** $b=\sqrt{3}$ **et** $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=\sqrt{3}^2-4\times(-3)\times3=3+36=39$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha\times\beta=\frac{3}{-3}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2(-1)=\frac{3}{9}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{7}{3}}{-1}=-\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) ; $\sqrt{x-1}\geq x-7$

Corrigé : Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-1\geq 0$ Signifie que : $x\geq 1$

L'équation est donc définie sur : $D_I=[1,+\infty[$

b) Le tableau de signe de l'expression : $x-7$

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$x-7$	$-$	0	$+$

Si : $x\in[1;7[$ alors : $x-7<0$ donc : $\sqrt{x-1}\geq x-7$ est vraie pour tout $x\in[1;7[$

Donc : $S_1=[1;7[$

Si : $x\in[7;+\infty[$ alors : $x-7\geq 0$

$\sqrt{x-1}\geq x-7$ Equivaut à : $\sqrt{x-1}^2\geq(x-7)^2$ Equivaut à : $x-1\geq x^2-14x+49$

Equivaut à : $x-1-(x^2-14x+49)\geq 0$

Equivaut à : $x-1-x^2+14x-49\geq 0$

Equivaut à : $-x^2+15x-50\geq 0$

Étudions le signe du trinôme suivant : $-x^2+15x-50$

Calculons le discriminant de $-x^2+15x-50$: $a=-1$; $b=15$; $c=-50$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=15^2-4\times(-1)\times(-50)=225-200=25>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme : $-x^2+15x-50$ possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\frac{-20}{-2}=10$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\frac{-10}{-2}=5$

x	$-\infty$		5		10	$+\infty$
$-x^2+15x-50$		$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2+15x-50\geq 0$ Equivaut à : $x\in[5;10]$

Donc : $S_2=[5;10]\cap[7;+\infty[=[7;10]$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S=S_1\cup S_2=[1;10]$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $m(mx-1)<x(1-m)$

Corrigé : $m(mx-1)<x(1-m)$

$m(mx-1)<x(1-m)$ Équivalent à : $m^2x-m<x-mx$

Équivalent à : $m^2x+mx-x<m$

Équivalent à : $(m^2+m-1)x<m$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E)\ m^2+m-1=0$

Le discriminant de : $(E)\ m^2+m-1=0$ est : $\Delta=5>0$ et ses solutions sont : $m_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $m_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Comme : $a=1>0$ on déduit le tableau de signe suivant :

m	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$m2+m-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

1ére cas : $m\in\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$ on a ; $m^2+m-1>0$:

$(m^2+m-1)x<m$ Équivalent à : $x<\dfrac{m}{m^2+m-1}$

Donc : $S=\left]-\infty;\dfrac{m}{m^2+m-1}\right[$

2ére cas : $m\in\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ on a $m^2+m-1<0$:

$(m^2+m-1)x<m$ Équivalent à : $x>\dfrac{m}{m^2+m-1}$

Donc : $S=\left]\dfrac{m}{m^2+m-1};+\infty\right[$

3ére cas : $m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ l'inéquation devient : $0x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 'impossible

Par suite : $S=\varnothing$

4ére cas : $m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ l'inéquation devient : $0x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Par suite : $S=\mathbb{R}$

Exercice08 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : 1) $x+y=2x-1$ 2) $3x+2y-2=2y-2$

Corrigé : 1) On a $x+y=2x-1$ équivalent à : $-x+y+1=0$

Équivalent à : $y=x-1$ Donc : $S=\{(x;x-1)/\ x\in\mathbb{R}\}$

2) On a $3x+2y-2=2y-2$ équivalent à : $3x=0$ équivalent à : $x=0$

Donc : $S=\{(0;y)/\ y\in\mathbb{R}\}$

Exercice09 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $x-y-3\geq 0$

Corrigé : De l'inéquation précédente on en déduit : L'équation de la droite (D) : $x-y-3=0$

Qui détermine Deux demi-plans P_1 et P_2.

Cette droite passe par les points $A(0;-3)$ et $B(1;-2)$

On a $0-0-3\geq 0$ c a d $-3\geq 0$ on constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnées (0 ; 0) ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les Solutions de l'inéquation $x-y-3\geq 0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan P_1 hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$

Exercice10 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $2x-y<0$

Corrigé : De l'inéquation précédente on en déduit : l'équation de la droite (D) : $2x-y=0$

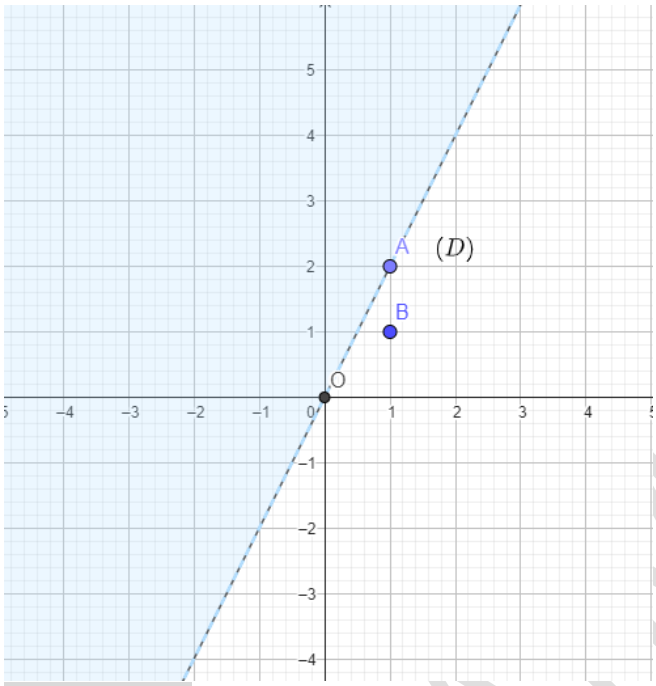
Cette droite passe par les points $O(0;0)$ et $A(1;2)$ détermine deux demi-plans P_1 et P_2

On prendra un autre point $B(1;1)$:

On a : $2\times1-1=1\geq0$

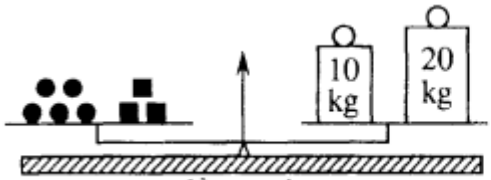
Donc : les coordonnes $(1;1)$ ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les Solution de l'inéquation $2x-y<0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi-plan P_1 colorée en bleu qui ne contient pas le point $(1;1)$ et privé de la droite (D)

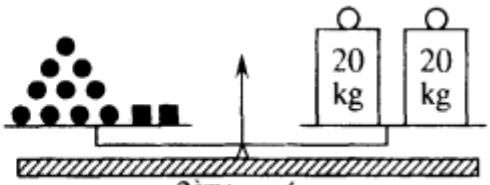


Exercice11 : On effectue deux pesées (les masses sont exprimées en kg).

La première pesée nous permet d'écrire : 5x + 3y = 30.



1ère pesée



2ème pesée

1)a) Déterminer l'équation que permet d'écrire la première pesée

b) Déterminer l'équation que permet d'écrire la seconde pesée

2) En déduire la masse d'une boule et la masse d'un cube.

Solution : Soit x la masse d'une boule (●) et y la masse d'un cube (■).

1)a) l'équation que permet d'écrire la première pesée est : $5x+3y=10+20$ c'est-à-dire : $5x+3y=30$

b) l'équation que permet d'écrire la seconde pesée est : $10x+2y=20+20$ c'est-à-dire : $10x+2y=40$

$10x+2y=40$ Signifie que : $2(5x+y)=40$ Signifie que : $5x+y=20$

2) Pour Déterminer la masse d'une boule et la masse d'un cube on va résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivantes : $\begin{cases}5x+3y=30\\5x+y=20\end{cases}$

$\begin{cases}5x+3y=30 & (L_1)\\5x+y=20 & (L_2)\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}2y=10 & (L_1)-(L_2)\\5x+y=20 & (L_2)\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}y=5\\5x+5=20\end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases}y=5\\5x=15\end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$

Donc : la masse d'une boule (●) est 3kg et la masse d'un cube (■) est 5kg

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases}3a^2-\dfrac{4}{b+1}=10\\-a^2+\dfrac{5}{b+1}=-7\end{cases}$

Solution : 1) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$

$\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}3x-4y=10 & (\times 1)\\-3x+15y=-21 & (\times 3)\end{cases}$

Donc : la somme des équations donne : $3x-4y-3x+5y=10-7$

Équivalent : $y=3$ Équivalent : $y=-1$

On a : $-x+5y=-7$ donc : $-x-5=-7$ Équivalent : $x=2$

La solution du système est donc : $S=\{(2,-1)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases}3a^2-\dfrac{4}{b+1}=10\\-a^2+\dfrac{5}{b+1}=-7\end{cases}$

$\begin{cases}3a^2-\dfrac{4}{b+1}=10\\-a^2+\dfrac{5}{b+1}=-7\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}3a^2-4\dfrac{1}{b+1}=10\\-a^2+5\dfrac{1}{b+1}=-7\end{cases}$

On pose : $\begin{cases}x=a^2\\y=\dfrac{1}{b+1}\end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases}3x-4y=10\\-x+5y=-7\end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $x=2$ et $y=-1$

Donc : $a^2=2$ et $\dfrac{1}{b+1}=-1$ Équivalent :($a=\sqrt{2}$ ou $a=-\sqrt{2}$) et $b+1=-1$

Donc : $a^2=2$ et $\dfrac{1}{b+1}=-1$ Équivalent :($a=\sqrt{2}$ ou $a=-\sqrt{2}$) et $b=-2$

Par suite : $S=\{(\sqrt{2},-2);(-\sqrt{2},-2)\}$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+my=6 \\ 2x+4y=5 \end{cases} (I)$ 2) $\begin{cases} mx+y=1+m \\ x+my=2 \end{cases} (J)$

Solution : 1) On utilise la Méthode des déterminants

On calcule le déterminant du système (I) : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - m\times 2 = 4-2m$

1ere cas : si $\Delta = 4-2m \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & m \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{4-2m} = \frac{24-5m}{4-2m}$ et $x = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{4-2m} = \frac{-7}{4-2m}$ Donc : $S = \left\{\left(\frac{24-5m}{4-2m}, \frac{-7}{4-2m}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta = 4-2m = 0$ c'est-à-dire : $m = 2$

Alors : on obtient le système suivant : $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ qui est équivalent a : $\begin{cases} x+2y=6 \\ x+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$ impossible

Donc: $S = \varnothing$

2) On utilise la Méthode des déterminants : $\begin{cases} mx+y=1+m \\ x+my=2 \end{cases} (J)$

On calcule le déterminant du système (J) : $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2-1$

1ere cas : si $\Delta = m^2-1 \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 1$ et $m \neq -1$

Alors le système (J) admet un couple solution unique :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1+m & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m(1+m)-2}{m^2-1} = \frac{m^2+m-2}{m^2-1} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & 1+m \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{2m-(1+m)}{m^2-1} = \frac{m-1}{m^2-1} = \frac{(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

Donc : $S = \left\{\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta = m^2-1 = 0$ c'est-à-dire : ou $m = -1$

Si $m = 1$ on remplace m par 1 on trouve : $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $x+y=2$

Dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'équation $x+y=2$

$x+y=2$ est équivalent a : $y=2-x$ alors on a : $S = \{(x;2-x)/x \in \mathbb{R}\}$

Si $m = -1$ on remplace m par -1 on trouve : $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ impossible

Donc: $S = \varnothing$

Exercice14 : On considère le polynôme : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

b) En déduire que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrer que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

b) Montrer que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) En déduire que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Solution : $P(x)=-5x^2+8x-3$

1) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $-5x^2+8x-3=0$; $\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-5)\times(-3)=4$

Donc : $x_1=\frac{-8-\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-10}{-10}=1$ et $x_2=\frac{-8+\sqrt{4}}{2\times(-5)}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}$

Par suite: $S=\left\{3/5;1\right\}$

b) Déduction que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

$P(x)=-5x^2+8x-3$ Admet deux racines : $x_1=1$ et $x_2=\frac{3}{5}$

Donc : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-5(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)=(x-1)(-5x+3)=(x-1)(3-5x)$

2) On suppose que : $|x+1|<\frac{1}{5}$

a) Montrons que : $-\frac{6}{5}<x<-\frac{4}{5}$

On a : $|x+1|<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}<x+1<\frac{1}{5}$ Signifie que : $-\frac{1}{5}-1<x+1-1<\frac{1}{5}-1$

Signifie que : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$

b) Montrons que : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$: on sait que : $P(x)=(x-1)(3-5x)$

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $\frac{4}{5}<-x<\frac{6}{5}$ Signifie que : $4<-5x<6$ Signifie que : $7<3-5x<9$ ①

On a : $-\frac{6}{5}<x<\frac{-4}{5}$ Signifie que : $-\frac{6}{5}-1<x-1<\frac{-4}{5}-1$ Signifie que : $-\frac{11}{5}<x-1<-\frac{9}{5}$

Signifie que : $\frac{9}{5}<-(x-1)<\frac{11}{5}$ ②

De : ① et ② on déduit que : $\frac{9}{5}\times7<-(x-1)(3-5x)<\frac{11}{5}\times9$ c'est-à-dire : $\frac{63}{5}<-P(X)<\frac{99}{5}$

Par suite: $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$

c) Déduction que $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Il suffit de vérifier que : $|P(x)-(-16,2)|<3,6$? c'est-à-dire : $|P(x)+16,2|<3,6$

On a : $-\frac{99}{5}<P(x)<-\frac{63}{5}$ donc : $-\frac{99}{5}+16,2<P(x)+16,2<-\frac{63}{5}+16,2$

Donc : $-\frac{18}{5}<P(x)+16,2<\frac{18}{5}$

Donc : $-6,3<P(x)+16,2<6,3$

Donc : $-6,3<P(x)+16,2<6,3$

Donc : $|P(x)-(-16,2)|<3,6$

Par suite: $-16,2$ est une valeur approchée de $P(x)$ avec la précision $3,6$

Exercice15 : Soit : $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ avec : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer a et b tels que :

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) Factoriser $P(x)$ dans ce cas

Solution :1) $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc : $P(2)=0$

Donc : $2\times2^3+3\times2^2+a\times2+b=0$ c'est-à-dire : $2a+b+28=0\ (1)$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12.

Donc : $P(1)=-12$ donc : $a-b+17=0\ (2)$

Donc le couple (a,b) est solution du système suivant : $\begin{cases}2a+b+28=0\\a-b+17=0\end{cases}$

En résolvant le système on trouve : $a=-11$ et $b=-6$

Donc : $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$

2) Factorisation de $P(x)$ dans ce cas :

$$\begin{array}{r|l}2x^3+3x^2-11x-6 & x-2\\ \hline -2x^3+4x^2 & 2x^2+7x+3\\ \hline 7x^2-11x-6 & \\ -7x^2+14x & \\ \hline +\ 3x-6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x)$ Soit divisible par $x-2$ donc : $P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

Exercice16 : Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ montrer que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ0$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution :1) $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

On a $P(3)=2\times3^3-5\times3^2-4\times3+3=54-45-12+3=0$ donc 3est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

$2x^3-5x^2-4x+3$	x-3
$-2x^3+6x^2$	$2x^2+x-1$
x^2-4x+3	
$-x^2+3x$	
$-x+3$	
$x-3$	
0	

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

On trouve : $P(x)=(x-3)Q(x)$ ① et $Q(x)=2x^2+x-1$

3) On a : $Q(x)=2x^2+x-1$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 1^2$ – 4 x 2x (-1) =1+ 8 = 9

Donc : $x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times2}=-1$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{1}{2}$ par suite :

$S=\left\{-1,1/2\right\}$

4) $Q(x)\geq0$ On a $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme $Q(x)$

Donc: le tableau de Signe:

x	$-\infty$	-1		$1/2$	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc: $S=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x-3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+x-1$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)=(2x-1)(x+1)$ par suite : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

6) On a : $P(x)=(x-3)(2x-1)(x+1)$

$P(x)=0$ Signifie : $(x-3)(2x-1)(x+1)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+1=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-1$ par suite : $S=\mathbb{R}-\left\{-3,-1,1/2\right\}$

7) $P(x)\succ0$ Signifie: $(x-3)Q(x)\succ0$:D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Par suite : $S=\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]3;+\infty[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien