

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant :

- 1) $x^2 + 23 = 32$ 2) $(x+1)^2 + 23 = 20$ 3) $23 - (x+1)^2 = -13$ 4) $25x^3 - 16x = 0$
 5) $-3x^2 - x - 3 = 0$ (on peut utiliser l'écriture canonique). 6) $(x-2)(x+4) = -9$

Solution : 1) L'équation : $x^2 + 23 = 32$

$$x^2 + 23 = 32 \text{ Signifie que : } x^2 = 9$$

9 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{9} = 3$ et $x = -\sqrt{9} = -3$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-3; 3\}$

2) L'équation : $(x+1)^2 + 23 = 20$

$(x+1)^2 + 23 = 20$ Signifie que : $(x+1)^2 = -3$ impossible car : -10 est négatif

Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S = \emptyset$

3) L'équation : $23 - (x+1)^2 = -13$

$$23 - (x+1)^2 = -13 \text{ Signifie que : } 23 + 13 = (x+1)^2 \text{ Signifie que : } (x+1)^2 = 36$$

$$\text{Signifie que : } x+1 = \sqrt{36} \text{ ou } x+1 = -\sqrt{36}$$

$$\text{Signifie que : } x+1 = 6 \text{ ou } x+1 = -6$$

$$\text{Signifie que : } x = 5 \text{ ou } x = -7$$

L'équation admet deux solutions $x = 5$ ou $x = -7$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-7; 5\}$

4) $25x^3 - 16x = 0$ Signifie que : $x(25x^2 - 16) = 0$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } 25x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } (5x)^2 - 4^2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } (5x-4)(5x+4) = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } 5x-4=0 \text{ ou } 5x+4=0$$

$$\text{Signifie que : } x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{5} \text{ ou } x = -\frac{4}{5}$$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0; -\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right\}$

5) $-3x^2 - x - 3 = 0$: On va d'abord déterminer la forme canonique du trinôme

$$-3x^2 - x - 3 = ax^2 + bx + c$$

$$-3x^2 - x - 3 = -3\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) - 3 \text{ on factorise par : } a = -3$$

$$= -3\left[x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 3 : \text{on remarque une identité remarquable :}$$

$$= -3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] - 3 = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{36} - 3 = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{35}{12}$$

$$-3x^2 - x - 3 = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{35}{12} \text{ Cette écriture s'appelle la forme canonique de } -3x^2 - x - 3$$

$$-3x^2 - x - 3 = 0 \text{ Signifie que : } -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{35}{12} = 0 \text{ Signifie que : } -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\text{Signifie que : } \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{35}{36} < 0$$

Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Donc : } S = \emptyset$$

$$6) (x-2)(x+4) = -9 \text{ Signifie que : } x^2 - 2x + 4x - 8 = -9$$

$$\text{Signifie que : } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = 0 \text{ Signifie que : } (x+1)^2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x+1 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = -1$$

$$\text{Donc l'ensemble de toutes les solutions est : } S = \{-1\}$$

Exercice02 : Déterminer le signe des expressions suivantes :

$$1) B(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{3} \quad 2) D(x) = 4 - x^2 \quad 3) E(x) = x^2 - 3x + 4 \quad 4) H(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$$

$$\text{Solution :1) } B(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{3}$$

$$B(x) = 0 \text{ Equivaut à : } -\frac{1}{2}x - \frac{7}{3} = 0 \text{ Equivaut à : } x = -\frac{14}{3} \text{ on a : } a = -\frac{1}{2} < 0$$

Le tableau du signe est :

x	$-\infty$	$-\frac{14}{3}$	$+\infty$
$B(x)$		+	-

$$\bullet \text{ Si : } x \in \left]-\frac{14}{3}, +\infty\right[\text{ alors : } B(x) < 0$$

$$\bullet \text{ Si : } x \in \left]-\infty, -\frac{14}{3}\right[\text{ alors : } B(x) > 0$$

$$\bullet \text{ Si : } x = -\frac{14}{3} \text{ alors : } B(x) = 0$$

$$2) D(x) = 4 - x^2$$

$$D(x) = 0 \text{ Equivaut à : } 4 - x^2 = 0 \text{ Equivaut à : } x^2 = 4 \text{ Equivaut à : } x = \sqrt{4} = 2 \text{ ou } x = -\sqrt{4} = -2$$

On a : $a = -1 < 0$ donc d'après la règle du signe du trinôme :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$D(x)$		-	+	-

$$\bullet \text{ Si : } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\text{ alors : } D(x) < 0$$

• Si : $x \in]-2, 2[$ alors : $D(x) > 0$

• Si : $x = -2$ ou $x = 2$ alors : $D(x) = 0$

3) $E(x) = x^2 - 3x + 4$: Le discriminant de : $x^2 - 3x + 4$ est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$ et ses racines sont Donc : $E(x)$ est un trinôme du second degré n'admettant pas de racine réelle, On a : $a = 1 > 0$ donc d'après la règle du signe du trinôme :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 3x + 4$	+	

Donc : pour tout x réel, $E(x)$ est strictement positif. ($E(x) > 0$)

4) $H(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$

• On va déterminer le domaine de définition de $H(x)$:

$H(x)$ Est définie si et seulement si $1 - x^2 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq -1$ et $x \neq 1$

Donc : le domaine de définition de H est : $D_H = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

• $x^2 + 1 = 0$ Équivaut à : $x^2 = -1$ impossible : $x^2 + 1 > 0$

Le numérateur est positif pour tout x , et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines -1 et 1 , on peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 1$	+		+	+	
$1 - x^2$	-	0	+	0	-
$F(x)$	-		+		-

• Si : $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ alors : $H(x) < 0$

• Si : $x \in]-1, 1[$ alors : $H(x) > 0$

H N'est pas définie si $x = -1$ et $x = 1$

Exercice03 : 1) Résoudre les équations suivantes : a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$

c) $3x^2 + 6x + 5 = 0$

2) Résoudre les inéquations suivantes : a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ b) $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$ c)

$3x^2 + 6x + 5 < 0$

Solution : 1) a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$: Calculons le discriminant : $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

L'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

Donc : l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

b) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, L'équation possède une racine double : $x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$

Donc : l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{1\}$

c) $3x^2 + 6x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$ Donc : $S = \emptyset$

2)a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$2x^2-3x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

b) $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

Étudions le signe du trinôme de : $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$ $a = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double : $x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

Donc : $S = \emptyset$

c) $3x^2 + 6x + 5 > 0$. Étudions le signe du trinôme $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$ $a = 3 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 + 6x + 5$	+	+

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice04 : Soit un rectangle de 6 cm par 10 cm. De combien de cm peut-on augmenter sa largeur et sa longueur pour que son périmètre reste inférieur à 96 cm ?

Solution : Soit x la longueur ajoutée à la longueur et à la largeur. Le nouveau périmètre devient : $2(\text{longueur} + \text{largeur}) = 2((10+x) + (x+6)) = 2(2x+16) = 4x+32$

Ce périmètre reste inférieur à 96 si : $4x+32 < 96 \Leftrightarrow 4x < 96-32 \Leftrightarrow x < 16$

On ne peut allonger les longueur et largeur de plus de 16 cm si on souhaite un périmètre inférieur à 96 cm

Exercice05 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-1} = x$

Solution : Remarque : La relation $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-1 \geq 0$ Signifie que : $x \geq 1$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [1, +\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d'élever au carré.

$\sqrt{x-1} = x$ Signifie que : $\sqrt{x-1}^2 = x^2$ et $x \geq 0$

Signifie que : $x-1 = x^2$ et $x \geq 0$

Signifie que : $x^2 - x + 1 = 0$ et $x \geq 0$

Le discriminant de : $x^2 - x + 1 = 0$ est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc pas de solutions

Par conséquent : $S = \emptyset$

Exercice06 : Soit le trinôme $(E) : P(x) = 2x^2 - 3x - 1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Dédurre les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) $c = -1$ et $b = -3$ et $a = 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 + 8 = 17$$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

$$2) \text{ on a : } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ et } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} \text{ donc } \alpha + \beta = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } \alpha \times \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$

$$\text{On a : } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\text{Donc } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{Donc } \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

$$\text{On a : } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{-1}{2}} = \frac{13}{4} \times (-2) = -\frac{13}{2}$$

$$\text{On sait que : } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\text{Donc : } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$$

$$\text{Donc : } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{Donc : } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$$mx^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$$

$$\textbf{Solution : } mx^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$$

$$1\text{ère cas : } m = 0 \text{ L'équation devient : } -4x + 3 = 0 \text{ c'est à dire : } x = \frac{3}{4} \text{ et Par suite : } S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$$

2ère cas : $m \neq 0$ c'est une équation du second degré :

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m+2)^2 - m \times (m+3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 3m = m + 4$$

$$\text{Si : } m = -4 \text{ alors : } \Delta' = 0$$

$$\text{Donc : L'équation admet une solution unique : } x = \frac{-b'}{a} = \frac{m+2}{m} = \frac{-4+2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ par suite : } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Si : $m > -4$ ($m \neq 0$) alors : $\Delta' > 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2 - \sqrt{m+4}}{m} \text{ Et } x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2 + \sqrt{m+4}}{m}$$

Par suite : $S = \left\{ \frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m}; \frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m} \right\}$

Si : $m < -4$ alors : $\Delta' < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S = \emptyset$

Exercice08 : Donner une équation du second degré qui a pour solutions : α et β dans les cas suivants : 1) $\alpha=1$ et $\beta=-2$ 2) $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ 3) $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de

l'équation : $x^2 - sx + p = 0$ avec : $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$

1) On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc :

$$x^2 - (1+(-2))x + 1 \times (-2) = 0$$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

2) On a : $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ solutions de l'équation du second degré donc :

$$x^2 - (-1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} \times (-1) = 0$$

C'est-à-dire : $x^2 + (1-\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

3) On a : $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2 - \left(\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)x + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ signifie que : $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

C'est-à-dire : $6x^2 - x - 1 = 0$

Exercice09 : Factoriser les expressions suivantes :

1) $x^2 - 10x + 25$ 2) $x^2 - 3x + 2$ 3) $x^4 - 3x^2 + 2$ 4) $x^4 - 4x^2 + 3$

Solution : 1) $x^2 - 10x + 25$ $a=1$ et $b=-10$ et $c=25$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (25) = 100 - 100 = 0$

Puisque : $\Delta = 0$ alors le trinôme admet une seule racine double : $x_1 = \frac{-(-10)}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$

Par suite la factorisation est : $x^2 - 10x + 25 = a(x - x_1)^2 = 1(x - 5)^2$

2) $x^2 - 3x + 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 = (1)^2 > 0$

Puisque : $\Delta > 0$ les solutions sont : $x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$

Par suite la factorisation est : $x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$

3) $x^4 - 3x^2 + 2$ On pose : $X = x^2$ donc on a : $X^2 - 3X + 2$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

Les racines sont : $X_1 = \frac{-(-3)+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{-(-3)-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$

Par suite la factorisation est : $X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$

Or on a : $X = x^2$ Donc : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$

Cela Signifie que : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - \sqrt{2}^2)(x^2 - 1^2)$

Par suite : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 1)(x + 1)$

4) $x^4 - 4x^2 + 3$ On pose : $X = x^2$ donc on a : $X^2 - 4X + 3$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

Donc : $X_1 = \frac{-(-4)+2}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{-(-4)-2}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$

Donc : $X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1)$ et par suite : $x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$

Donc : $x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2 - \sqrt{3}^2)(x^2 - 1^2)$

Par suite : $x^4 - 4x^2 + 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x-1)(x+1)$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (E) : $\frac{x-2}{x-3} = x-1$ 2) (F) : $\frac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$ 3) (G) : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

Solution : 1) (E) $\frac{x-2}{x-3} = x-1$

• 1. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x-3 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq 3$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E = \mathbb{R} - \{3\}$

• 2. On résout l'équation

$\frac{x-2}{x-3} = x-1$ Signifie que : $x-2 = (x-3)(x-1)$

Signifie que : (E') $x^2 - 5x + 5 = 0$

Le discriminant de : (E') $x^2 - 5x + 5 = 0$ est : $\Delta = 5$ et ses racines sont : $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S = \left\{ \frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right\}$

2) (E) $\frac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$

• a. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x-1 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq 1$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E = \mathbb{R} - \{1\}$

• b. On résout l'équation :

$\frac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$ Signifie que : $x^2 - x = (x-1)(2x+3)$

Signifie que : (F') $x^2 + 2x - 3 = 0$

Le discriminant de : (F') $x^2 + 2x - 3$ est : $\Delta = 16$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \in D_E$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1 \notin D_E$; donc l'équation (E1) a une unique solution

Donc : $S = \{-3\}$

3) (G) : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

• a). On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x \neq 0$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_G = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

• b) On résout l'équation :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \text{ Signifie que : } x^2 = x \text{ Signifie que : } x^2 - x = 0 \text{ Signifie que : } x(x-1) = 0$$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$

Signifie que : $x=0 \notin D_G = \mathbb{R}^*$ ou $x=1$

Donc : l'équation (G) a une unique solution

Donc : $S = \{1\}$

Exercice11 : Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes.

1) $x^2 - 16 < 0$ 2) $\frac{3x-1}{x+2} > 1$

Solution : 1) $x^2 - 16 < 0$ Signifie que : $(x-4)(x+4) < 0$

Valeurs frontières : $x-4=0$ Signifie que : $x=4$ et $x+4=0$ Signifie que : $x=-4$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$x-4$		-	0	+
$x+4$	-	0	+	+
$(x-4)(x+4)$	+	0	-	+

Donc : $S =]-4, 4[$

2) $\frac{3x-1}{x+2} > 1$

• On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette équation est définie si et seulement si $x+2 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq -2$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-2\}$

• On résout l'inéquation : $\frac{3x-1}{x+2} > 1$ On annule le second membre :

$$\frac{3x-1}{x+2} > 1 \text{ Signifie que : } \frac{3x-1}{x+2} - 1 > 0$$

$$\text{Signifie que : } \frac{3x-1-x-2}{x+2} > 0 \text{ Signifie que : } \frac{2x-3}{x+2} > 0$$

Valeurs frontières : $2x-3=0$ Signifie que : $x = \frac{3}{2}$ et $x+2=0$ Signifie que : $x = -2$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$		-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$\frac{2x-3}{x+2}$	+	-	0	+

Donc : $S =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Exercice12 : Quelles sont les solutions de l'inéquation : $3x^2 + 2x - 1 > 2x^2 + x - 3$?

Solution : $3x^2 + 2x - 1 > 2x^2 + x - 3$ signifie : $3x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - x + 3 > 0$

Signifie : $x^2 + x + 2 > 0$

Pour résoudre cette inéquation, calculons delta le discriminant : $a=1$; $b=1$; $c=2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

Attention ce n'est pas parce que delta est négatif que cette inéquation n'admet pas de solution.

Le coefficient devant x^2 est : $a = 1$ positif donc elle est donc toujours positive.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 2$	+	

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$|x^2 + 3x + 2| + |x^2 - 3x + 2| < 12 : (I)$

Solution : $|x^2 + 3x + 2| + |x^2 - 3x + 2| < 12 ; (I)$

Étudions le signe des trinômes suivants : $x^2 + 3x + 2$ et $x^2 - 3x + 2$

Calculons le discriminant de $x^2 + 3x + 2$: $a = 1 ; b = 3 ; c = 2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme : $x^2 + 3x + 2$ possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Calculons le discriminant de $x^2 - 3x + 2$: $a = 1 ; b = -3 ; c = 2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme : $x^2 - 3x + 2$ possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Donc : on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	+	+	0	-	0	+
x^2+3x+2	+	0	-	0	+	+	+

Si : $x \in]-\infty; -2]$ alors : $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

L'inéquation (I) devient : $x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12$

Signifie que : $2x^2 + 4 < 12$

Signifie que : $x^2 < 4$ Signifie que : $\sqrt{x^2} < \sqrt{4}$ Signifie que : Signifie que : $-2 < x < 2$ $|x| < 2$

Donc : $S_1 =]-2; 2[\cap]-\infty; -2] = \emptyset$

Si : $x \in [-2; -1]$ alors : $|x^2 + 3x + 2| = -(x^2 + 3x + 2)$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

L'inéquation (I) devient : $-x^2 - 3x - 2 + x^2 - 3x + 2 < 12$

Signifie que : $-6x < 12$ Signifie que : $x > -2$

Donc : $S_2 =]-2; +\infty[\cap [-2; -1] =]-2; -1[$

Si : $x \in [-1; 1]$ alors : $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

L'inéquation (I) devient : $x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12$

Signifie que : $2x^2 + 4 < 12$ Signifie que : $x^2 < 4$

Signifie que : $\sqrt{x^2} < \sqrt{4}$ Signifie que : $|x| < 2$ Signifie que : $-2 < x < 2$

Donc : $S_3 = [-1; 1] \cap]-2; 2] = [-1; 1]$

Si : $x \in [1; 2]$ alors : $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$

L'inéquation (I) devient : $x^2 + 3x + 2 - x^2 + 3x - 2 < 12$

Signifie que : $6x < 12$ Signifie que : $x < 2$

Donc : $S_4 = [1; 2] \cap]-\infty; 2[= [1; 2[$

Si : $x \in [2; +\infty[$ alors : $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ et $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$

L'inéquation (I) devient : $x^2 + 3x + 2 + x^2 - 3x + 2 < 12$

Signifie que : $2x^2 + 4 < 12$ Signifie que : $x^2 < 4$ Signifie que : $|x| < 2$ Signifie que : $-2 < x < 2$

Donc : $S_5 =]-2; 2[\cap [2; +\infty[= \emptyset$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 =]-2; 2[$

Exercice14 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} -5\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = -9 \\ 2\sqrt{x} + 8\sqrt{y} = 36 \end{cases}$$

Solution : Soient : $x \geq 0$ et $y \geq 0$

On pose : $\begin{cases} X = \sqrt{x} \\ Y = \sqrt{y} \end{cases}$ Donc on a : $\begin{cases} -5X + 7Y = -9 \\ 2X + 8Y = 36 \end{cases}$

$\begin{cases} -5X + 7Y = -9 \\ 2X + 8Y = 36 \end{cases}$ Signifie que :

$\begin{cases} -5X + 7Y = -9 & (L_1) \\ 2X + 8Y = 36 & (L_2) \end{cases}$ Qui Signifie que : $\begin{cases} -5X + 7Y = -9 & (L_1) \\ 54Y = 162 & (5L_2 + 2L_1) \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} -5X + 7Y = -9 \\ Y = 3 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} -5X + 21 = -9 \\ Y = 3 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X = 6 \\ Y = 3 \end{cases}$

Donc : $X = 6$ et $Y = 3$ et puisque on a noté : $\begin{cases} X = \sqrt{x} \\ Y = \sqrt{y} \end{cases}$ Donc : $\sqrt{x} = 6$ et $\sqrt{y} = 3$

Donc : $(\sqrt{x})^2 = 6^2$ et $(\sqrt{y})^2 = 3^2$ c'est-à-dire : $x = 36$ et $y = 9$

Donc : $S = \{(36, 9)\}$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système suivant :

$\begin{cases} (m+1)x + 3y = m \\ 3x + (m+1)y = 2 \end{cases} \quad (I)$

Solution : 1) On utilise la Méthode des déterminants

On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1) \times (m+1) - 3 \times 3 = (m+1)^2 - 3^2 = (m+1-3)(m+1+3) = (m-2)(m+4)$$

$\Delta = 0$ Signifie que : $(m-2)(m+4) = 0$ Signifie que : $m-2 = 0$ ou $m+4 = 0$

$\Delta = 0$ Signifie que : $m = 2$ ou $m = -4$

1ere cas : si $\Delta \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$ et $m \neq -4$ Alors le système (I) admet un couple solution

$$\text{Unique : } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \frac{m(m+1) - 6}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + m - 6}{(m-2)(m+4)} = \frac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)} = \frac{m+3}{m+4}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \frac{2(1+m)-3m}{(m-2)(m+4)} = \frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)} = -\frac{1}{m+4}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left(\frac{m+3}{m+4}; -\frac{1}{m+4} \right) \right\}$$

2ere cas : si $\Delta = 0$ c'est-à-dire : $m = 2$ ou $m = -4$

Si $m = 2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ 3x+3y=2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $3x+3y=2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x+3y=2$

$3x+3y=2$ est équivalent a : $3y=2-3x$ Signifie que : $y = \frac{2}{3} - x$

$$\text{Alors on a : } S = \left\{ \left(x; \frac{2}{3} - x \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $m = -4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases} -3x+3y=-4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x-3y=4 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ impossible Donc: $S = \emptyset$

Exercice16: Soit le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

- 1) Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 ?
- 2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$
- 3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-2}{P(x)} \geq 0$

Solution : 1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 3 sont : -3 ; -1 ; 1 ; 3

2) S'il existe une racine $a \in \mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a) = 0$

C'est-à-dire : $a^3 + 3a^2 - a - 3 = 0$

C'est-à-dire : $a(a^2 + 3a - 1) = 3$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 3

C'est-à-dire : $a \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

$$\text{On trouve seulement : } \begin{cases} P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = -27 + 27 + 3 - 3 = 0 \\ P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = -1 + 3 + 1 - 3 = 0 \\ P(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0 \end{cases}$$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -3 et -1 et 1

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a : -3 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x+3)Q(x)$

Mais aussi on a : -1 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(-1) = (-1+3)Q(-1) = 0$

C'est-à-dire : $Q(-1) = 0$

C'est-à-dire : -1 est racine du polynôme $Q(x)$

C'est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x+1$

C'est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x) = (x+1)R(x)$

Donc : $P(x) = (x+3)(x+1)R(x)$

Mais aussi on a : 1 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(1) = (1+3)(1+1)R(1) = 0$

C'est-à-dire : $R(1) = 0$

C'est-à-dire : 1 est racine du polynôme $R(x)$

C'est-à-dire : $R(x)$ est divisible par $x-1$

C'est-à-dire : $R(x) = (x-1)C(x)$

Donc : $P(x) = (x+3)(x+1)(x-1)C(x)$ Avec $C(x) = c = 1$ est une constante car $\deg P = 3$

Donc : $P(x) = (x+3)(x+1)(x-1)$

$$4) \frac{2-x}{P(x)} \geq 0$$

$(x+3)(x+1)(x-1) = 0$ Signifie : $x+3=0$ ou $x+1=0$ ou $x-1=0$

Signifie : $x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = 1$

$2-x=0$ Signifie : Signifie : $x=2$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	0	-
$\frac{2-x}{P(x)}$	-	+	-	+	0	-

Donc : $S =]-3; -1[\cup]1; 2]$

Exercice 17 : 1) Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que : $P(x+1) - P(x) = x$

2) En déduire la somme suivante : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

3) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(x+1) - P(x) = x^2$

4) En déduire la somme suivante : $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec : $a \neq 0$

$$P(x+1) - P(x) = x \text{ Signifie } (a(x+1)^2 + b(x+1) + c) - (ax^2 + bx + c) = x$$

$$\text{Signifie : } ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c = x$$

$$\text{Signifie : } (2a-1)x + a + b = 0$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2a-1=0 \\ a+b=0 \end{cases} \text{ Donc : donc : } a = \frac{1}{2} \text{ et par suite : } b = -\frac{1}{2}$$

Donc : $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ avec : $c \in \mathbb{R}$

2) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \text{????}$

On remplace successivement x par : $0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n-1 ; n$

Dans : $P(x+1) - P(x) = x$ On obtient :

$$P(0+1) - P(0) = 0 \quad (1)$$

$$P(1+1) - P(1) = 1 \quad (2)$$

$$P(2+1) - P(2) = 2 \quad (3)$$

.....

$$P((n-1)+1) - P(n-1) = n-1 \quad (n-1)$$

$$P(n+1) - P(n) = n \quad (n)$$

On fait la somme membre à membre les égalités : $(1) + (2) + (3) + \dots + (n-1) + (n)$

On obtient : $P(n+1) - P(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = S_1$

$$\text{Donc : } S_1 = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) + c - \left(\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{2}(n+1) + c \right)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1-1) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad 3) P \text{ de degré } 3$$

Donc P s'écrit sous la forme : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec : $a \neq 0$

$$P(x+1) - P(x) = x \text{ Signifie } (a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^2$$

après les calculs on trouve : $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{6}$

Et par suite : $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ avec : $d \in \mathbb{R}$

De la même façon on montre que : $P(n+1) - P(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = S_2$

$$\text{Et on trouve : } S_2 = P(n+1) - P(0) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

