Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminent :

1) $2x^2=72$ 2) $-\frac{1}{2}x^2=5$ 3) $2(3x-1)^2=8$ 4) $7x^2+16x=0$

5) $-5x^2+6x+8=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique). 6) $4(x^2-1)=(x-1)(x+2)$

Solution :1) L'équation : $2x^2=72$

$2x^2=72$ Signifie que : $x^2=\frac{72}{2}$ Signifie que : $x^2=36$

36 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{36}=6$ et. $x=-\sqrt{36}=-6$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-6;6\}$

2) L'équation : $-\frac{1}{2}x^2=5$

$-\frac{1}{2}x^2=5$ Signifie que : $x^2=-10$ mais : -10 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $2(3x-1)^2=8$

$2(3x-1)^2=8$ Signifie que : $(3x-1)^2=4$

Signifie que : $3x-1=\sqrt{4}$ ou $3x-1=-\sqrt{4}$

Signifie que : $3x-1=2$ ou $3x-1=-2$

Signifie que : $3x=2+1$ ou $3x=-2+1$

Signifie que : $3x=3$ ou $3x=-1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-\frac{1}{3}$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{1}{3}$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

4) $7x^2+16x=0$ Signifie que : $x(7x+16)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $7x+16=0$ c'est-à-dire : : $x=0$ ou $x=-\frac{16}{7}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;-\frac{16}{7}\right\}$

5) $-5x^2+6x+8=0$: On va d'abord déterminer la forme canonique du trinôme

$-5x^2+6x+8=ax^2+bx+c$

$-5x^2+6x+8=-5\left(x^2-\frac{6}{5}x\right)+8$ on factorise par : $a=-5$

$=-5\left[\left(x^2-2\times x\times\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]+8$: on remarque une identité remarquable :

$=-5\left[\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}\right]+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{5}+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$

$-5x^2+6x+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$-5x^2+6x+8=0$ Signifie que : $-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}=0$ Signifie que : $-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{49}{5}$

Signifie que : $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$ Signifie que : $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$

Signifie que : $x-\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{49}{25}}$ ou $x-\frac{3}{5}=-\sqrt{\frac{49}{25}}$

Signifie que : $x-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ ou $x-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$

Signifie que : $x=\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$ ou $x=-\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$

Signifie que : $x=\frac{10}{5}=2$ ou $x=-\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{4}{5};2\right\}$

6) $4\left(x^2-1\right)=(x-1)(x+2)$ Signifie que : $4\left(x^2-1^2\right)-(x-1)(x+2)=0$

Signifie que : $4(x+1)(x-1)-(x-1)(x+2)=0$

Signifie que : $(x-1)\left[4(x+1)-(x+2)\right]=0$ Signifie que : $(x-1)(3x+2)=0$

Signifie que : $x-1=0$ ou $3x+2=0$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Exercice02 : Factoriser les trinômes : a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution : a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4}=\frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2+19x-5=4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$:

Et le trinôme $9x^2 - 6x + 1$ a une forme factorisée : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x) = 0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x) = 3x^2 - x - 3$ b) $P(x) = 2x^2 - x - 2 + \sqrt{2}$ c) $P(x) = -4x^2 + 4x - 1$

d) $P(x) = -10x^2 + 3x - \frac{1}{4}$

Solution : a) $P(x) = 3x^2 - x - 3$

Calculons le discriminant de l'équation $3x^2 - x - 3 = 0$: $a = 3$; $b = -1$; $c = -3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = (-1)^2 - 4\times 3\times(-3) = 1 + 36 = 37 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{37}}{2\times 3} = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{37}}{2\times 3} = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$

Donc : $S = \left\{\frac{1-\sqrt{37}}{6}; \frac{1+\sqrt{37}}{6}\right\}$

Et le trinôme $P(x) = 3x^2 - x - 3$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $P(x) = 3\left(x - \frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$

b) $P(x) = x^2 - x - 2 + \sqrt{2}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - x - 2 + \sqrt{2} = 0$: $a = 1$; $b = -1$; $c = \sqrt{2} - 2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = (-1)^2 - 4\times 1\times\left(\sqrt{2} - 2\right) = 1 - 4\sqrt{2} + 8 = 8 - 4\sqrt{2} + 1^2$

Donc : $\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 2\sqrt{2}\times 1 + 1^2 = \left(2\sqrt{2} - 1\right)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}}{2\times 1} = \frac{1-\left|2\sqrt{2}-1\right|}{2} = \frac{1-\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{1-2\sqrt{2}+1}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}}{2\times 1} = \frac{1+\left|2\sqrt{2}-1\right|}{2} = \frac{1+\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{1+2\sqrt{2}-1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Donc : $S = \left\{1-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$

Et le trinôme $P(x) = x^2 - x - 2 + \sqrt{2}$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $P(x) = 1\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = \left(x - 1 + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

c) Calculons le discriminant de l'équation $-4x^2 + 4x - 1 = 0$: $a = -4$; $b = 4$; $c = -1$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 4^2 - 4\times(-4)\times(-1) = 16 - 16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-4)} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et le trinôme $P(x) = -4x^2 + 4x - 1$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

$-4x^2+4x-1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

d) $P(x)=-10x^2+3x-\frac{1}{4}$

Calculons le discriminant de l'équation $-10x^2+3x-\frac{1}{4}=0$: $a=-10$; $b=3$; $c=-\frac{1}{4}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=3^2-4\times(-10)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=9-10=-1<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et le trinôme $P(x)=-10x^2+3x-\frac{1}{4}$ ne peut pas être factorisée

Exercice04 : En additionnant les âges de Fatima et de Najat on trouve 44. En multipliant leurs âges on trouve 468. Najat est plus jeune que Fatima. Quel âge à Fatima ?

Solution : Posons x ="l'âge de Najat " et y ="l'âge de Fatima ".

x et y vérifient le système : $\begin{cases} x+y=44 \\ x\times y=468 \end{cases}$

De la première équation on tire $y=44-x$ puis en remplaçant cette valeur de y dans la deuxième équation : $x\times y=468$ on obtient : $x\times(44-x)=468$

Donc : $44x-x^2=468$

Donc : $-x^2+44x-468=0$ et On obtient une équation du deuxième degré.

Résolvons cette équation : Calculons delta : $\Delta=44^2-4\times(-1)\times(-468)=1936-1872=64$

L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44-8}{-2}=\frac{-532}{-2}=26$ Et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44+-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44+8}{-2}=\frac{-36}{-2}=18$

Si x = 26, alors : $y=44-x=44-26=18$

Et si x = 18 alors : $y=44-x=44-18=26$

Donc 18 et 26 sont les âges de Fatima et de Najat.

Comme Najat est plus jeune que Fatima alors Fatima a 26 ans.

Exercice05 : On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $x^4-7x^3+16x^2-14x+4=0$

1) a) Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E') : $X^2-7X+12=0$

2) Montrer que si α est solution de l'équation (E) alors : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) En déduire les solutions de l'équation (E)

Solution :1) On a : $0^4-7\times0^3+16\times0^2-14\times0+4=4\neq0$

Donc : 0 n'est pas solution de l'équation (E)

2) (E') : $X^2-7X+12=0$

Calculons delta : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1$

L'équation admet donc deux solutions :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-1}{2}=3$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+1}{2}=4$ Donc : $S=\{1;2\}$

2) Soit α solution de l'équation (E) donc : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1)

Donc : $\alpha\neq0$ d'après 1)a)

Montrons que : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

Il suffit de montrer que : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=0$?

$$\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\alpha^2+2\alpha\times\frac{2}{\alpha}+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12$$

$$=\alpha^2+4+\frac{4}{\alpha^2}-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12=\alpha^2-7\alpha+16+\frac{4}{\alpha^2}-\frac{14}{\alpha}=\frac{\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4}{\alpha^2}$$

Et puisque on a : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1) donc : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\frac{0}{\alpha^2}=0$

Par suite : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) d'après 1)b) les solutions de l'équation (E) sont les solutions des équations : $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ et $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$

• $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=3$

Signifie : $\alpha^2-3\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-3)^2-4\times2=1$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ Et $x_2=\frac{3+1}{2}=2$

• $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=4$

Signifie : $\alpha^2-4\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-4)^2-4\times2=8$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{4-\sqrt{8}}{2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ Et $x_2=\frac{4+\sqrt{8}}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

Donc : $S=\left\{1;2;2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$

Exercice06 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{3x+4}=x$

Corrigé : Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $3x+4\geq0$ Signifie que : $x\geq-\frac{4}{3}$

L'équation est donc définie sur : $D_E=\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{3x+4}=x$ Signifie que : $\sqrt{3x+4}^2=x^2$ et $x\geq0$

Signifie que : $3x+4=x^2$ et $x\geq0$

Signifie que : $-x^2+3x+4=0$ et $x\geq0$

Le discriminant de : $-x^2+3x+4=0$ est : $\Delta=3^2-4\times4\times(-1)=9+16=25>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\cancel{-1}$ et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=4\in D_E$ et $x\geq0$

$-x^2+3x+4=0$ et $x\geq-\dfrac{4}{3}$ et $x\geq0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice07 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :
$m^3x+1=x+3$

Corrigé : Soit $x\in\mathbb{R}$: on va écrire cette équation sous la forme : $ax+b=0$

$m^3x+1=x+3$ Équivalent à : $m^3x-x+1-3=0$

Équivalent à : $(m^3-1)x-2=0$

Équivalent à : $(m-1)(m^2+m+1)x-2=0$

On a : $(m-1)(m^2+m+1)=0$ Équivalent à : $m-1=0$ ou $m^2+m+1=0$

Pour : $m^2+m+1=0$ $\Delta=-3<0$ pas de solutions

Donc : $(m-1)(m^2+m+1)=0$ Équivalent à : $m=1$

1ére cas : $m\neq1$:

Alors : $(m-1)(m^2+m+1)x-2=0$ Équivalent à : $(m-1)(m^2+m+1)x=2$

Équivalent à : $x=\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}\right\}$

2ére cas : $m=1$: L'équation devient : $0x-2=0$ Équivalent à : $-2=0$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice08 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ 2) $\dfrac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq0$ 3) $\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

Corrigé : Méthode : Pour résoudre l'inéquation : $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$
on transforme tout d'abord l'inéquation pour se ramener à une étude de signes de facteurs du premier degré:

$x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ Signifie que : $x(x+2)-(2x+1)(x+2)\geq0$

Signifie que : $(x+2)[x-(2x+1)]\geq0$

Signifie que : $(x+2)(x-2x-1)\geq0$

Signifie que : $(x+2)(-x-1)\geq0$

On peut alors dresser le tableau de signes de l'expression : $(x+2)(-x-1)$

$-x-1=0$ Signifie que : $x=-1$
$x+2=0$ Signifie que : $x=-2$
On cherche à résoudre l'inéquation :
$(x+2)(-x-1)\geq0$ Donc : $S=[-2,-1[$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-1-x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) $\dfrac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq 0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $2x^2-12x+19$
Calculons son discriminant : $a=2$; $b=-12$; $c=19$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=12^2-4\times 2\times 19=144-152=-8<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=2>0$ et $\Delta<0$, alors : $2x^2-12x+19>0$

Le signe de : $\dfrac{2x^2-12x+19}{x-2}$ ne dépend donc que de celui de : $x-2$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;2\right[$

3) $\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq 0$
Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$
Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{9-\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9-3}{2\times(-6)}=\dfrac{6}{-12}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{9+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9+3}{2\times(-6)}=\dfrac{12}{-12}=-1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$
Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice09 : Soit : $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+3$ montrer que : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

On a $P(-3)=2\times(-3)^3+9(-3)^2+7\times(-3)-6=-54+81-21-6=0$ donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

$$\begin{array}{rl|l} + & 2x^3+9x^2+7x-6 & x+3 \\ & -2x^3-6x^2 & \\ \hline & 3x^2+7x-6 & 2x^2+3x-2 \\ & -3x^2-9x & \\ \hline & -2x-6 & \\ & 2x+6 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

2) Donc : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec : $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) $Q(x)=2x^2+3x-2$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2x(-2) = 9+16 = 25$

Donc : $x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{-8}{4}=-2$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Par suite: $S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$.

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(2x-1)(x+2)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$.

6) On a : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+3)(2x-1)(x+2)=0$

Signifie : $x+2=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+3=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$ par suite : $S=\left\{-3,-2,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+3)Q(x)<0$

x	$-\infty$		-3		-2		$1/2$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc: $S=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

Exercice10 : On considère l´équation : (E) : $x^3-x^2-4x-6=0$

1) Montrer que le nombre 3 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

Corrigé :1) On remarque que : $3^3-3^2-4\times3-6=27-9-12-6=27-27=0$

Donc : le nombre 3 est solution de (E)

2) Le nombre 3 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases}a=1\\b-3a=-1\\c-3b=-4\\-3c=-6\end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=2\end{cases}$

Donc : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^3-x^2-4x-6=0$ Equivaut à : $(x-3)(x^2+2x+2)=0$

Equivaut à : $x-3=0$ ou $x^2+2x+2=0$

Equivaut à : $x=3$ ou $x^2+2x+2=0$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=2^2-4\times2=4-8=-4<0$ donc pas solutions

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\{3\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

On a : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=-4<0$ et puisque : $a=1>0$ donc : $x^2+2x+2>0$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]3,+\infty\right[$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{5}{x-1}+\frac{3}{y-2}=4 \\ \frac{-2}{x-1}+\frac{1}{y-2}=1 \end{cases}$$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\neq 1$et $y\neq 1$ on pose : $X=\frac{1}{x-1}$ et $Y=\frac{1}{y-2}$

Le système devient : $\begin{cases} 5X+3Y=4 \\ -2X+Y=1 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=\frac{1}{11}$ et $Y=\frac{13}{11}$

Donc : $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{11}$ et: $\frac{1}{y-2}=\frac{13}{11}$ c'est-à-dire : $x-1=11$et $y-2=\frac{11}{13}$

Donc : $x=12$ et $y=\frac{37}{13}$ par suite : $S=\left\{\left(12,\frac{37}{13}\right)\right\}$

Exercice12 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases} (m+2)x+y=m+1 \\ 9x+(m+2)y=6 \end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases} -x+y=-2 \\ 9x-y=6 \end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution :1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}=(m+2)\times(m+2)-9\times 1=(m+2)^2-3^2=(m+2-3)(m+2+3)=(m-1)(m+5)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-1)(m+5)=0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}=(2+m)(1+m)-6=m^2+2m+m+2-6=m^2+3m-4$: a = 1, b = 3 ; c = -4

Le discriminent est : $b^2-4ac=3^2+16=25>0$

Donc : $m_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3-5}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4$ et $m_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3+5}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $\Delta_x=m^2+3m-4=1(m-(-4))(m-1)=(m+4)(m-1)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}=6(2+m)-9(1+m)=12+6m-9m-9=3-3m=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq1$ et $m\neq-5$

Dans ce *cas* : $\Delta\neq0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)}=\frac{m+4}{m+5}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)}=-\frac{3}{m+5}$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+4}{m+5};-\frac{3}{m+5}\right)\right\}$

c) Déduction de la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

On pose : $m=-3$ dans : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on obtient : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

Et puisque: $-3\neq1$ et $-3\neq-5$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{-3+4}{-3+5};-\frac{3}{-3+5}\right)\right\}$ c'est-à-dire : $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\right\}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m=1$ alors $\Delta=0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$: on trouve : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\9x+3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\3x+y=2\end{cases}$

Qui est équivalent à (3): $3x+y=2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x+y=2$

Ce système a une infinité de solutions

c) $3x+y=2$ est équivalent a : $y=2-3x$

Alors on a : $S=\{(x;2-3x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$

5) On suppose que : $m=-5$

a) Si $m=-5$ alors $\Delta=0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\ 9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on trouve : $\begin{cases}-3x+y=-4\\ 9x-3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-y=4\\ 3x-y=2\end{cases}$

b) (3) $\begin{cases}3x-y=4\\ 3x-y=2\end{cases}$ impossible donc : Ce système n'a pas de solutions

c) $S=\varnothing$

Exercice13 :1) Résoudre algébriquement l'inéquation suivante : $|2x-1|\leq|x+2|$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $|2x-1|\leq|x+2|$

Corrigé : 1) Résolution algébrique

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue

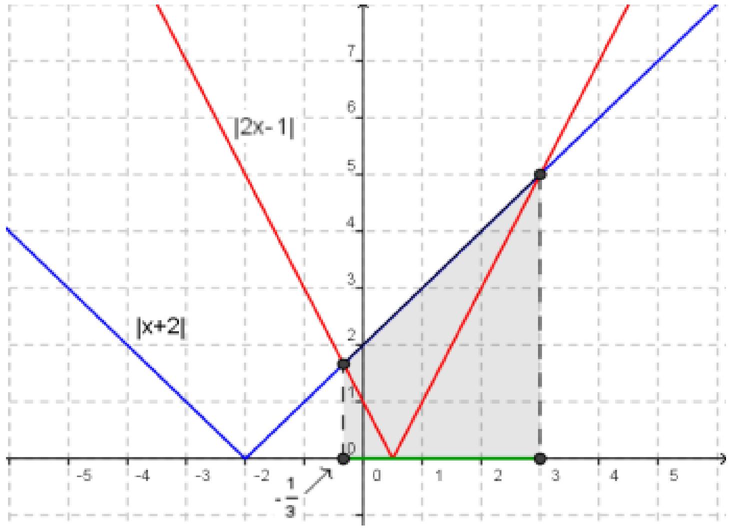
$x+2=0$ Signifie que : $x=-2$ et $2x-1=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$
(E_2)	$-2x+1\leqslant -x-2$ $x\geqslant 3$ impossible $S_1=\varnothing$		$-2x+1\leqslant x+2$ $x\geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$		$2x-1\leqslant x+2$ $x\leqslant 3$ $S_3=\left[\frac{1}{2};3\right]$

On obtient alors la solution : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left[-\frac{1}{2};3\right]$

2) Résolution graphique



On obtient alors la solution : $S=\left[-\frac{1}{2};3\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien