

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans utiliser le discriminant les équations suivantes :

- 1) $x^2 = 16$ 2) $x^2 = -8$ 3) $(x+2)^2 = 9$ 4) $5x^2 - 4x = 0$
 5) $3x^2 - x - 2 = 0$ (On peut utiliser l'écriture canonique). 6) $x^2 - 9 + 5(x+3) = 0$

Solution : 1) L'équation : $x^2 = 16$

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-4; 4\}$

2) L'équation : $x^2 = -8$ -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S = \emptyset$

3) L'équation : $(x+2)^2 = 9$

On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-5$. Donc l'ensemble de toutes les solutions est :

$S = \{-5; 1\}$

4) $5x^2 - 4x = 0$ Signifie que : $x(5x - 4) = 0$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0; \frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2 - x - 2 = 0$: On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2 - x - 2$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2\frac{1}{2 \times 3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right) \quad \text{Cette écriture s'appelle la forme canonique}$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{Signifie que : } (x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$

6) $x^2 - 9 + 5(x+3) = 0$ Signifie que : $x^2 - 3^2 + 5(x+3) = 0$ Signifie que : $(x+3)(x-3) + 5(x+3) = 0$

Signifie que : $(x+3)[(x-3)+5] = 0$ Signifie que : $(x+3)(x+2) = 0$ Signifie que : $x+3=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=-3$ ou $x=-2$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-3; -2\}$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x) = 0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x) = -5x^2 + 6x + 8$

b) $P(x) = 2x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$

c) $P(x) = 16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}$

d) $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$

Solution : a) $P(x) = -5x^2 + 6x + 8$

Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2 + 6x + 8 = 0$: $a = -5$; $b = 6$; $c = 8$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 6^2 - 4 \times (-5) \times 8 = 36 + 160 = 196 = 14^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \times (-5)} = \frac{-6 - 14}{-10} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \times (-5)} = \frac{-6 + 14}{-10} = -\frac{4}{5}$$

Donc : $S = \left\{-\frac{4}{5}; 2\right\}$

Et le trinôme $P(x) = -5x^2 + 6x + 8$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $P(x) = -5(x - 2)\left(x - \left(-\frac{4}{5}\right)\right) = -5(x - 2)\left(x + \frac{4}{5}\right) = (x - 2)(-5x - 4) = (2 - x)(5x + 4)$

b) $P(x) = 2x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$:

$a = 2$; $b = -(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$; $c = \sqrt{6}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = \left(-(2\sqrt{2} + \sqrt{3})\right)^2 - 4 \times 2 \times \sqrt{6} = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 8 \times \sqrt{6}$

$\Delta = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 8 \times \sqrt{6} = (2\sqrt{2})^2 + 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{6}$

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 + 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

Donc : $\Delta = (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|}{4} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - (2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|}{4} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

Donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2} \right\}$

Et le trinôme $P(x) = 2x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $P(x) = 2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (x - \sqrt{2}) = (2x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2})$

c) $P(x) = 16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}$

Calculons le discriminant de l'équation $16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9} = 0$: $a = 16$; $b = -\frac{8}{3}$; $c = \frac{1}{9}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = \left(-\frac{8}{3} \right)^2 - 4 \times 16 \times \frac{1}{9} = \frac{64}{9} - \frac{64}{9} = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{8}{3}}{2 \times 16} = \frac{1}{12}$

Donc : $S = \left\{ \frac{1}{12} \right\}$ et le trinôme $P(x) = 16x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

$P(x) = 16 \left(x - \frac{1}{12} \right)^2 = 4^2 \left(x - \frac{1}{12} \right)^2 = \left(4 \left(x - \frac{1}{12} \right) \right)^2 = \left(4x - \frac{1}{3} \right)^2$

d) $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$

Calculons le discriminant de l'équation $-\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$: $a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = -4$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times (-4) = 1 - 8 = -7 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S = \emptyset$

Et le trinôme $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$ ne peut pas être factorisée

Exercice03 : Sans calculer le discriminant Δ résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 + x - 6 = 0$ 2) $4x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

Solution : On sait que : les solutions de l'équation : $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \times \beta = 0$ sont : $x_1 = \alpha$ et $x_2 = \beta$

1) $x^2 + x - 6 = 0$ signifie que : $x^2 - (2 + (-3))x + 2 \times (-3) = 0$

C'est-à-dire : $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$ par suite : $S = \{-3; 2\}$

2) $4x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$ signifie que : $x^2 + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

Signifie que : $x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$ c'est-à-dire : $x^2 - \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)x + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ par suite : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

Exercice04 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ b) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$ c) $x^2 - 3x - 10 < 0$

Solution : a) $2x^2 - 4x + 6 \geq 0$ $a = 2$

Calculons le discriminant : $a = 2$, $b = -4$ et $c = 6$ donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 4x + 6$	+	

Par suite : $S = \mathbb{R}$

b) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$: $a = 4$ Étudions le signe du trinôme : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{8+4}{2 \times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$	
$3x^2-4x+6$	+	0	-	0	+

Par suite : $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

c) $x^2 - 3x - 10 < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x^2-3x-10$	+	0	-	0	+

Par suite : $S =]-2, 5[$

Exercice05 : Soit le trinôme (E) : $P(x) = 3x^2 - 7x + 1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) $a = 3$ et $b = -7$ et $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 49 - 12 = 37$$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha + \beta = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$ et $\alpha \times \beta = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7$$

On a : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Donc $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{49}{9} - \frac{2}{3} = \frac{43}{9}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{43}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{43}{9} \times 3 = \frac{43}{3}$

On sait que : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{343}{27} - \frac{7}{3} = \frac{280}{27}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $2x^2 - 10 > -x$ 2) $-2x^2 - 3 > -5x$ 3) $\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2} \geq 0$ 4) $-2x(x-2)(x^2-8x+16) > 0$

Solution : Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

• Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) > 0$.

• Résolvez $f(x)=0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

• Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

• Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

1) $2x^2 - 10 > -x$

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation pour obtenir une inéquation du type :

$ax^2 + bxc > 0$

$2x^2 - 10 > -x$ Signifie que : $2x^2 + x - 10 > 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $2x^2 + x - 10$

Calculons le discriminant de $2x^2 + x - 10$: $a = 2$; $b = 1$; $c = -10$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 1 + 80 = 81 > 0$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$

On obtient le tableau de signe suivant : $a = 2 > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		2	$+\infty$
$2x^2 + x - 10$	+	0	-	0	+

Donc : l'ensemble de solutions est : $S = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right[\cup] 2; +\infty [$

2) $-2x^2 - 3 > -5x$:

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation pour obtenir une inéquation du type :

$ax^2 + bxc > 0$

$-2x^2 - 3 > -5x$ Signifie que : $-2x^2 + 5x - 3 > 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $-2x^2 + 5x - 3$

Calculons le discriminant de $-2x^2 + 5x - 3$: $a = -2$; $b = 5$; $c = -3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

On obtient le tableau de signe suivant : $a = -2 < 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 5x - 3$		-	0	+	0	-	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]1; \frac{3}{2}[$

$$3) \frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2} \geq 0$$

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x+5-6x^2$ Calculons son discriminant :

$$a = -6; b = 7; c = 5$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 7^2 - 4 \times (-6) \times 5 = 49 + 120 = 169 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2a} = \frac{-7 - 13}{2 \times (-6)} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2a} = \frac{-7 + 13}{2 \times (-6)} = -\frac{1}{2}$$

$$-3(1-x)^2 \leq 0 \quad \text{Car un carré est toujours positif ou nul.}$$

$$-3(1-x)^2 = 0 \quad \text{Signifie que : } 1-x=0 \quad \text{Signifie que : } x=1$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$7x + 5 - 6x^2$		-	0	+		+	0	-	
$-3(1-x)^2$		-		-	0	-		-	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		+	0	-		-	0	+	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{3}; +\infty[$

$$4) -2x(x-2)(x^2-8x+16) > 0$$

$$-2x(x-2)(x^2-8x+16) = 0 \quad \text{Signifie que : } x^2-8x+16=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \quad \text{ou} \quad x=0$$

$$\text{Signifie que : } x^2-8x+16=0 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=0$$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

$$\text{Calculons son discriminant : } a=1; b=-8; c=16$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1 > 0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16 \geq 0$

$$\text{La racine double est : } x_1 = \frac{8}{2 \times 1} = 4$$

$$-2x(x-2)(x^2-8x+16) = 0 \quad \text{Signifie que : } x=4 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=0$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$-2x$	+	0	-	-	-
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x^2 - 8x + 16$	+	+	+	0	+
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$	-	0	+	0	-

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16) > 0$ est : $S =]0; 2]$

Exercice07 : Déterminez le nombre positif dont le carré est plus grand de 15 que le double de sa valeur.

Solution : La première chose que nous devons faire est de traduire le problème sous la forme d'une équation. Soit x le nombre que nous essayons de trouver. La première information qui nous est donnée est que x est positif ; c'est-à-dire $x > 0$. Deuxièmement, on nous dit que le carré du nombre, x^2 , dépasse le double de sa valeur, $2x$, de 15. Cela signifie que la différence entre x^2 et $2x$ vaut 15. Par conséquent,

$$x^2 - 2x = 15 \text{ C'est-à-dire : } x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\text{Calculons le discriminant de : } x^2 - 2x - 15 = 0 : \quad a = 1; b = -2 ; c = -15$$

$$\text{Donc : } \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64 = 8^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2a} = \frac{2 - 8}{2 \times 1} = -3 < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2a} = \frac{2 + 8}{2 \times 1} = 5 > 0$$

Cependant, on nous a dit que nous recherchons un nombre positif ; par conséquent, La solution est 5.

Exercice08 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m les équations suivantes :

$$1) x^2 - 2x + m - 1 = 0 \quad 2) (m-1)x^2 - 2x - 1 = 0$$

Corrigé : 1) $x^2 - 2x + m - 1 = 0$

$$\text{C'est une équation du second degré : } \Delta_m = b^2 - 4ac = 4 - 4(m-1) = 4 - 4m + 4 = 8 - 4m$$

L'équation admet deux solutions si et seulement si : $\Delta_m > 0$

$$1^{\text{ère}} \text{ cas : } 8 - 4m > 0 \text{ c'est-à-dire : } m < 2$$

Alors l'équation admet deux solutions : ($\Delta_m > 0$) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{8 - 4m}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2 - m}}{2} = 1 - \sqrt{2 - m}$$

$$\text{Et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{8 - 4m}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2 - m}}{2} = 1 + \sqrt{2 - m}$$

$$\text{Par suite : } S = \{1 - \sqrt{2 - m}; 1 + \sqrt{2 - m}\}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta_m = 8 - 4m = 0 \text{ c'est-à-dire : } m = 2$$

$$\text{L'équation devient : } x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ c'est à dire : } (x-1)^2 = 0$$

$$\text{Signifie que : } x = 1 \text{ par suite : } S = \{1\}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta_m = 8 - 4m < 0 \text{ c'est-à-dire : } m > 2$$

$$\text{L'équation n'a pas de solution dans } \mathbb{R} \text{ donc : } S = \emptyset$$

$$2) (m-1)x^2 - 2x - 1 = 0$$

1ère cas : $m=1$ L'équation devient : $-2x-1=0$ c'est à dire : $x = -\frac{1}{2}$ et par suite : $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2ère cas : $m \neq 1$ c'est une équation du second degré :

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (-1)(m-1) = 1 + m - 1 = m$$

Si : $m=0$ alors : $\Delta' = 0$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x = \frac{-b'}{a} = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{0-1} = -1$ par suite : $S = \{-1\}$

Si : $m > 0$ ($m \neq 1$) alors : $\Delta' > 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m-1} \text{ Et } x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 + \sqrt{m}}{m-1}$$

$$\text{Par suite : } S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{m}}{m-1}; \frac{1 + \sqrt{m}}{m-1} \right\}$$

Si : $m < 0$ alors : $\Delta' < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S = \emptyset$

Exercice09 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

2) Déterminer une factorisation de $x^4 + 3x^2 + 2$ en un produit de trinômes.

3) En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4 + 3x^2 + 2 \leq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l'équation de départ.

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \text{ Équivaut à : } (x^2)^2 + 3x^2 + 2 = 0$$

Je pose : $X = x^2$ l'équation devienne : $X^2 + 3X + 2 = 0$

Le discriminant de : $X^2 + 3X + 2 = 0$ est : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

C'est-à-dire : $x^2 = -2$ impossible ou $x^2 = -1$ aussi impossible

Donc l'équation $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$:

$$S = \emptyset$$

$$2) \text{ On a : } X^2 + 3X + 2 = 1(X+1)(X+2)$$

Donc une factorisation de $x^4 + 3x^2 + 2$ en un produit de trinômes est : $x^4 + 3x^2 + 2 = 1(x^2+1)(x^2+2)$

3) Résolution de l'inéquation : $x^4 + 3x^2 + 2 < 0$

$$\text{On a : } x^4 + 3x^2 + 2 = 1(x^2+1)(x^2+2)$$

Et on a : $x^2+1 > 0$ et $x^2+2 > 0$ donc $x^4 + 3x^2 + 2 > 0$

Ainsi, l'ensemble solution de $x^4 + 3x^2 + 2 \leq 0$ est : $S = \emptyset$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) ; $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0$

Corrigé : a) L'équation est définie si $x^2+1 \geq 0$ toujours vraie

L'équation est donc définie sur : $D_f = \mathbb{R}$

$$\text{b) } \sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0 \text{ Équivaut à : } \sqrt{x^2+1} \leq 2x-1$$

Le tableau de signe de l'expression : $2x-1$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

Si : $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$ alors : $2x-1 < 0$ et l'inéquation n'a pas de solution puisque

$$\sqrt{x^2+1} > 0$$

Donc : $\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1$ est vraie pour tout $x \in [1; 7[$

Donc : $S_1 = \emptyset$

Si : $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$ alors : $2x-1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2+1} \leq 2x-1 \text{ Equivaut à : } \sqrt{x^2+1}^2 \leq (2x-1)^2 \text{ Equivaut à : } x^2+1 \leq 4x^2-4x+1$$

$$\text{Equivaut à : } -3x^2+4x \leq 0$$

$$\text{Equivaut à : } x(-3x+4) \leq 0$$

Étudions le signe du trinôme suivant : $x(-3x+4)$

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$
$-3x+4$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x(-3x+4)$	$-$	0	$+$	$-$

$$x(-3x+4) \leq 0 \text{ Equivaut à : } x \in]-\infty; 0] \cup [\frac{4}{3}; +\infty[$$

$$\text{Donc : } S_2 = \left(]-\infty; 0] \cup [\frac{4}{3}; +\infty[\right) \cap \left[\frac{1}{2}; +\infty[= \left[\frac{4}{3}; +\infty[$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3}; +\infty[$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 5x-3y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-7y=-9 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x-4y=-16 \\ 5x+9y=-11 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4x-6y=3 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -7x+2y=-4 \\ 6x+3y=5 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x+3y=4 \\ 8x-4y=5 \end{cases}$$

Solution :1) Par la Méthode de substitution

$$\begin{cases} 5x-3y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases} \text{ Equivaut à } \begin{cases} 5x-3y=4 \\ y=5-3x \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y=5-3x \\ 5x-3(5-3x)=4 \end{cases}$$

$$\text{Equivaut à } \begin{cases} y=5-3x \\ 5x-15+9x=4 \end{cases} \text{ Equivaut à } \begin{cases} y=5-3x \\ 14x=19 \end{cases} \text{ Equivaut à } \begin{cases} y=5-3x \\ x=\frac{19}{14} \end{cases}$$

$$\text{Equivaut à } \begin{cases} y=5-3 \times \frac{19}{14} \\ x=\frac{19}{14} \end{cases} \text{ Equivaut à } \begin{cases} y=\frac{13}{14} \\ x=\frac{19}{14} \end{cases}$$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \left\{ \left(\frac{19}{14}, \frac{13}{14} \right) \right\}$

$$2) \begin{cases} 2x+3y=8 & (L_1) \\ 5x-7y=-9 & (L_2) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+3y=8 & (L_1) \\ -29y=-58 & 2(L_2)-5(L_1) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+3y=8 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à } \begin{cases} 2x+6=8 \\ y=2 \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \{(1, 2)\}$

$$3) \begin{cases} 3x-4y=-16 & (L_1) \\ 5x+9y=-11 & (L_2) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 3x-4y=-16 & (L_1) \\ 47y=47 & 3(L_2)-5(L_1) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 3x-4y=-16 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à } \begin{cases} 3x-4=-16 \\ y=1 \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} 3x=-12 \\ y=1 \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \{(-4, 1)\}$

$$4) \begin{cases} 4x-6y=3 & (L_1) \\ 5x+7y=1 & (L_2) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 4x-6y=3 & (L_1) \\ 58y=-11 & 4(L_2)-5(L_1) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 4x-6y=3 \\ y=-\frac{11}{58} \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à } \begin{cases} 4x+\frac{66}{58}=3 \\ y=-\frac{11}{58} \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} 4x=\frac{54}{29} \\ y=-\frac{11}{58} \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} x=\frac{27}{58} \\ y=-\frac{11}{58} \end{cases}$$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \left\{ \left(\frac{27}{58}, -\frac{11}{58} \right) \right\}$

$$5) \begin{cases} -7x+2y=-4 & (L_1) \\ 6x+3y=5 & (L_2) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -7x+2y=-4 & (L_1) \\ -33y=-11 & -7(L_2)-6(L_1) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -7x+2y=-4 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à } \begin{cases} -7x+\frac{2}{3}=-4 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} -7x=-\frac{14}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$

$$6) \begin{cases} x+3y=4 & (L_1) \\ 8x-4y=5 & (L_2) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x+3y=4 & (L_1) \\ -28y=-27 & (L_2)-8(L_1) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x+3y=4 \\ y=\frac{27}{28} \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à } \begin{cases} x+\frac{81}{28}=4 \\ y=\frac{27}{28} \end{cases} \text{ Équivaut à } \begin{cases} x=\frac{31}{28} \\ y=\frac{27}{28} \end{cases}$$

Donc : $S = \left\{ \left(\frac{31}{28}, \frac{27}{28} \right) \right\}$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x - (y-1)^2 = -8 \\ 4x + 3(y-1)^2 = 31 \end{cases}$$

Solution : On pose : $\begin{cases} X = x \\ Y = (y-1)^2 \end{cases}$ Le système devient :
$$\begin{cases} X - Y = -8 \\ 4X + 3Y = 31 \end{cases}$$

Le déterminant du système est : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$

$$\text{Donc : } X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 31 & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-24 + 31}{7} = \frac{7}{7} = 1 \text{ et } Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 31 \end{vmatrix}}{7} = \frac{31 + 32}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

Donc : $X = 1$ et $Y = 9$ c'est-à-dire : $x = 1$ et $(y-1)^2 = 9$

Donc : $x = 1$ et $y-1 = \sqrt{9} = 3$ ou $y-1 = -\sqrt{9} = -3$ c'est-à-dire : $x = 1$ et $y = 4$ ou $y = -2$

Par suite : $S = \{(1, 4); (1, -2)\}$

Exercice13 : Soit le polynôme : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1) Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$

Solution : 1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6

2) S'il existe une racine $a \in \mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a) = 0$

C'est-à-dire : $2a^3 - a^2 - 13a - 6 = 0$

C'est-à-dire : $a(2a^2 - a - 13) = 6$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 6

C'est-à-dire : $a \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

$$\text{On trouve seulement : } \begin{cases} P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 = 0 \\ P(3) = 2 \times 3^3 - 3^2 - 13 \times 3 - 6 = 0 \end{cases}$$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -2 et 3

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a : -2 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x + 2$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x + 2)Q(x)$

Mais aussi on a : 3 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(3) = (3 + 2)Q(3) = 0$

C'est-à-dire : $Q(3) = 0$

C'est-à-dire : 3 est racine du polynôme $Q(x)$

C'est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x - 3$

C'est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x) = (x - 3)R(x)$

Donc : $P(x) = (x + 2)(x - 3)R(x)$

C'est-à-dire : $P(x)$ est divisible par $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

Donc : $P(x) = (x^2 - x - 6)R(x)$

Mais le $\deg P = 3$ et $\deg(x^2 - x - 6) = 2$ par suite : $\deg R = 1$

Donc : $R(x) = ax + b$

$$P(x) = (x^2 - x - 6)(ax + b) = ax^3 + bx^2 - ax^2 - bx - 6ax - 6b$$

$$P(x) = ax^3 + (b - a)x^2 - (b + 6a)x - 6b \text{ et puisque : } P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ -6b = -6 \\ -(b + 6a) = -13 \end{cases} \text{ signifie que } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc : $P(x) = (x+2)(x-3)(2x+1)$

4) $P(x) \geq 0$ Signifie: $(x+2)(x-3)(2x+1) \geq 0$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$-1/2$	3	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Donc : $S = \left[-2; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$

Exercice14 : Soit : $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

1) Vérifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$

Alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) Vérifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ Trouver un polynôme $Q(x)$

tel que : $P(x) = (x-2) \times Q(x)$

5) En déduire que : $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

6) Déterminer les réels a ; b et c tel que : $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$

7) En déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degré

Solution : 1) $P(0) = 2 \times 0^4 - 9 \times 0^3 + 14 \times 0^2 - 9 \times 0 + 2 = 2 \neq 0$

Donc 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) α racine du polynôme est $P(x)$

Signifie que : $P(\alpha) = 0$

Signifie que : $2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0$

On calcul $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)$?

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha^4} - \frac{9}{\alpha^3} + \frac{14}{\alpha^2} - \frac{9}{\alpha} + 2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha^4} - \frac{9\alpha}{\alpha^4} + \frac{14\alpha^2}{\alpha^4} - \frac{9\alpha^3}{\alpha^4} + \frac{2\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2}{\alpha^4}$$

Et puisque $2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0$

Donc : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{0}{\alpha^4} = 0$

Donc : $\frac{1}{\alpha}$ Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) $P(2) = 2 \times 2^4 - 9 \times 2^3 + 14 \times 2^2 - 9 \times 2 + 2 = 32 - 72 + 56 - 18 + 2$

$P(2) = 2 \times 2^4 - 9 \times 2^3 + 14 \times 2^2 - 9 \times 2 + 2 = 32 - 72 + 56 - 18 + 2 = 0$

Donc : 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

On trouve que : $P(x) = (x-2) \times (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)$

5) On a 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $\frac{1}{2}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et puisque $P(x) = (x-2) \times Q(x)$ $\left(\frac{1}{2}-2\right) \times Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Alors : $\left(\frac{1}{2}-2\right) \times Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ or $\frac{1}{2}-2 \neq 0$ donc : $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

6) En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par : $x - \frac{1}{2}$ on trouve :

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2)$$

Donc : $a = 2$ et $b = -4$ et $c = 2$

7) On a : $P(x) = (x-2) \times Q(x)$ et $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2)$

Donc : $P(x) = (x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2)$

On factorise aussi : $2x^2 - 4x + 2$: On remarque que 1 est racine

En Effectuant la division euclidienne de $2x^2 - 4x + 2$ par $x-1$

On trouve : $2x^2 - 4x + 2 = (x-1)(2x-2)$

Finalement : $P(x) = (x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$P(x) = 2(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$ C'est-à-dire : $P(x) = (x-2)(2x-1)(x-1)^2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

