http://www.xriadiat.com **DL3 /K** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant :

1) $x^2 = 16$ 2) $x^2 = -8$ 3) $(x+2)^2 = 9$ 4) $5x^2 - 4x = 0$

5) $3x^2 - x - 2 = 0$ (on peut utiliser l'écriture canonique). 6) $x^2 - 9 + 5(x+3) = 0$

Solution :1) L'équation : $x^2 = 16$

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et. $x = -\sqrt{16} = -4$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-4; 4\}$

2) L'équation : $x^2 = -8$ -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : $S = \varnothing$

3) L'équation : $(x+2)^2 = 9$

On a alors $x+2=3$ ou . $x+2=-3$
L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est :
$S = \{-5; 1\}$

4) $5x^2 - 4x = 0$ Signifie que : $x(5x - 4) = 0$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0; \frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2 - x - 2 = 0$: On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2 - x - 2$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2\frac{1}{2\times 3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2 - x - 2 = 0$ Signifie que : $(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$ on a alors : $x - 1 = 0$ ou $x + \frac{2}{3} = 0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

6) $x^2-9+5(x+3)=0$ Signifie que : $x^2-3^2+5(x+3)=0$ Signifie que : $(x+3)(x-3)+5(x+3)=0$

Signifie que : $(x+3)\left[(x-3)+5\right]=0$ Signifie que : $(x+3)(x+2)=0$ Signifie que : $x+3=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=-3$ ou $x=-2$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-3;-2\}$

Exercice02 : La somme des âges de Samira, de sa mère et de sa grand-mère est 90 ans. La grand-mère a le double de l'âge de la mère et l'âge de Samira est le tiers de celui de sa mère.
Quel est l'âge de chacune ?

Solution : Choix de l'inconnue

Soit x l'âge de la mère

Alors, l'âge de la grand-mère est $2x$ et celui de Marie est $\frac{1}{3}x$.

L'équation est donc : $x+2x+\frac{1}{3}x=90$

La solution est $x=27$. Déduisez-en les 3 âges !

Soit à partir de 100 minutes de communication.

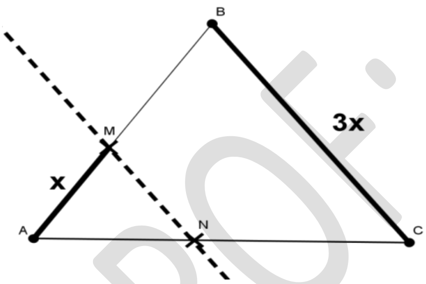
Au final, l'ensemble solution de (E) est S = {1}.

Exercice03 : Soit ABC un triangle et les droites : (AB) et (MN)sont parallèles et on pose :
$AM=x\ cm$ et $BC=3x\ cm$ et $MN=6\ cm$ et $AN=8\ cm$ (Voir la figure)

1) Montrer que le périmètre du triangle ABC est : $P(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)$

2) Existe-t-ils des valeurs de x pour que le périmètre du Triangle ABC est : 18cm

Solution :



1) Dans le triangle ABC on a : (AB) ∥ (MN)

Donc d'après le théorème de Thalès direct en a :

$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ Donc : $\frac{AB}{AM}=\frac{x}{2}$ c'est-à-dire : $AB=\frac{x}{2}AM$

Et on a aussi : $\frac{AC}{AN}=\frac{x}{2}$ c'est-à-dire : $AC=\frac{x}{2}AN$

Et puisque : $AM=x\ cm$ et $AN=8\ cm$ alors : $AB=\frac{x^2}{2}$ et $AC=4x$

Le périmètre du triangle ABC est donc : $P(x)=AB+AC+BC=\frac{x^2}{2}+4x+3x=\frac{x^2}{2}+7x=\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)$

2) Il suffit de résoudre l'équation : $P(x)=36$

$\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)=36$ Équivalent à : $x^2+14x-72=0$

Équivalent à : $x^2+2\times 7x+7^2-7^2-72=0$ c'est-à-dire : $\left(x+7\right)^2-121=0$

Équivalent à : $\left(x+7\right)^2=121$

Équivalent à : $x+7=\sqrt{121}=11$ ou $x+7=-\sqrt{121}=-11$
Équivalent à : $x=4$ ou $x=-18\prec 0$ impossible

Donc : $x=4$ par suite : $AM=4\ cm$ et $AB=\frac{x}{2}AM=8$ et $AC=\frac{x}{2}AN=16$ et $AN=8\ cm$

Donc : le point M est le milieu du segment $[AB]$ et le point N est le milieu du segment $[AC]$

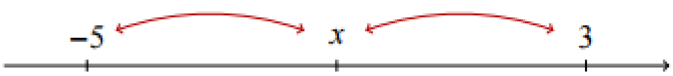
Exercice04 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'équation : $|x-3|=|x+5|$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ graphiquement l'équation : $|x-2|=5$

Solution :1) **Résolvons notre équation algébriquement :**
Égalité de deux valeurs absolues :
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|
D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :
$|x-3|=|x+5|$ Signifie que : $x-3=x+5$ ou $x-3=-\left(x+5\right)$
Signifie que : $-3=5$ (impossible) ou $x-3=-x-5$
Signifie que : $2x=-2$
Signifie que : $x=-1$ Donc : $S=\{-1\}$

2) **Résolvons notre équation Graphiquement :** $|x-3|=|x-(-5)|$

La distance de x à 3 est égale à : $|x-3|$
La distance de x à −5 est égale à : $|x-(-5)|=|x+5|$
Déterminons les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 3 est égale à la distance de x à -5
Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous nous apercevons que x doit être au milieu de l'intervalle $x\in[-5;3]$

Donc : $x=\frac{-5+3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $S=\{-1\}$

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2+27}=2\sqrt{3x}$

Solution : $\sqrt{x^2+27}=2\sqrt{3x}$

• L'équation est définie si $x^2+27\geq 0$ et $3x\geq 0$
Or $x^2+27\geq 0$ donc : L'équation est définie si $x\geq 0$
L'équation est donc définie sur : $D_E=[0.+\infty[$

• $\sqrt{x^2+27}=2\sqrt{3x}$ Signifie que : $\left(\sqrt{x^2+27}\right)^2=\left(2\sqrt{3x}\right)^2$

Signifie que : $x^2+27=12x$ c'est-à-dire : $x^2-12x+27=0$
Signifie que : $x^2-2\times 6x+6^2-6^2+27=0$
Signifie que : $\left(x-6\right)^2-9=0$

Signifie que : $(x-6)^2=9$

Signifie que : $x-6=\sqrt{9}$ ou $x-6=-\sqrt{9}$ c'est-à-dire : $x=9\in[0.+\infty[$ ou $x=3\in[0.+\infty[$

Par conséquent : $S=\{3;9\}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On donnera la réponse sous forme d'intervalle :1) $2-5x\geq 4+3x$ 2) $2(4x-3)-3(2x+1)>-x+2$ 3) $\frac{x-3}{6}+\frac{x+7}{2}>2x-9$

4) $\frac{3(2x+1)}{6}-\frac{5x+3}{2}+5\leq\frac{-x+4}{8}$ 5) $(2x+1)(9-3x)+2\leq(6x-1)(1-x)$ 6) $\frac{1-3x}{2}+\frac{9x-1}{4}<\frac{3x-5}{4}$

Solution :1) $2-5x\geq 4+3x$ Signifie que : $-5x-3x\geq -2+4$

Signifie que : $-8x\geq 2$

Signifie que : $x\leq\frac{2}{-8}$

Signifie que : $x\leq-\frac{1}{4}$

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right]$

2) $2(4x-3)-3(2x+1)>-x+2$ Signifie que : $8x-6-6x-3>-x+2$

Signifie que : $8x-6x+x>2+3+6$

Signifie que : $3x>11$

Signifie que : $x>\frac{11}{3}$

Donc : $S=\left]\frac{11}{3},+\infty\right[$

3) $\frac{x-3}{6}+\frac{x+7}{2}>2x-9$ Signifie que : $\frac{x-3}{6}+\frac{3(x+7)}{6}>\frac{6(2x-9)}{6}$

Signifie que : $\frac{x-3+3x+21}{6}>\frac{12x-54}{6}$

Signifie que : $\frac{4x+21}{6}>\frac{12x-54}{6}$

Signifie que : $4x+21>12x-54$

Signifie que : $4x-12x>-54-21$

Signifie que : $-8x>-72$ Signifie que : $x<\frac{-72}{-8}$

Signifie que : $x<9$

Donc : $S=]-\infty,9[$

4) $\frac{3(2x+1)}{6}-\frac{5x+3}{2}+5\leq\frac{-x+4}{8}$ Signifie que : $(\times 16)$: $12(2x+1)-(5x+3)+80\leq 2(-x+4)$

Signifie que : $24x+12-5x-3+80\leq -2x+8$

Signifie que : $24x-5x+2x\leq 8-12-80+3$

Signifie que : $21x\leq -81$ Signifie que : $x\leq-\frac{81}{21}$ Signifie que : $x\leq-\frac{27}{7}$

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{27}{7}\right]$

5) $(2x+1)(9-3x)+2\le(6x-1)(1-x)$ Signifie que : $18x-6x^2+9-3x+2\le 6x-6x^2-1+x$

Signifie que : $18x-6x^2+9-3x+2\le 6x-6x^2-1+x$
Signifie que : $18x-3x-6x-x\le -1-9-2$

Signifie que : $8x\le -12$ Signifie que : $x\le\frac{-12}{8}$

Signifie que : $x\le -\frac{3}{2}$ Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

6) $\frac{1-3x}{2}+\frac{9x-1}{4}<\frac{3x-5}{4}$ Signifie que : $(\times 4)$: $2-6x+9x-1<3x-5$

Signifie que : $-6x+9x-3x<-5+1-2$ c'est-à-dire : $0x<-6$ impossible

Donc : $S=\varnothing$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

1) $2x-y+1=2y-2x+5$ 2) $x+5=y+5$

Solution :1) On a $2x-y+1=2y-2x+5$ équivalent à : $4x-3y-4=0$

Équivalent à : $4x=3y+4$ équivalent à : $x=\frac{3}{4}y+1$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{3}{4}y+1;y\right)/\,y\in\mathbb{R}\right\}$

2) On a $x+5=y+5$ équivalent à : $y=x$

Donc : $S=\{(x;x)/\,x\in\mathbb{R}\}$

Exercice08 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $3x-4y>0$

Solution : De l'inéquation précédente on en déduit : l'équation de la droite (D) : $3x-4y=0$

Cette droite passe par les points $A(4;3)$ et $B(-4;-3)$ et détermine deux demi-plans P_1 et P_2

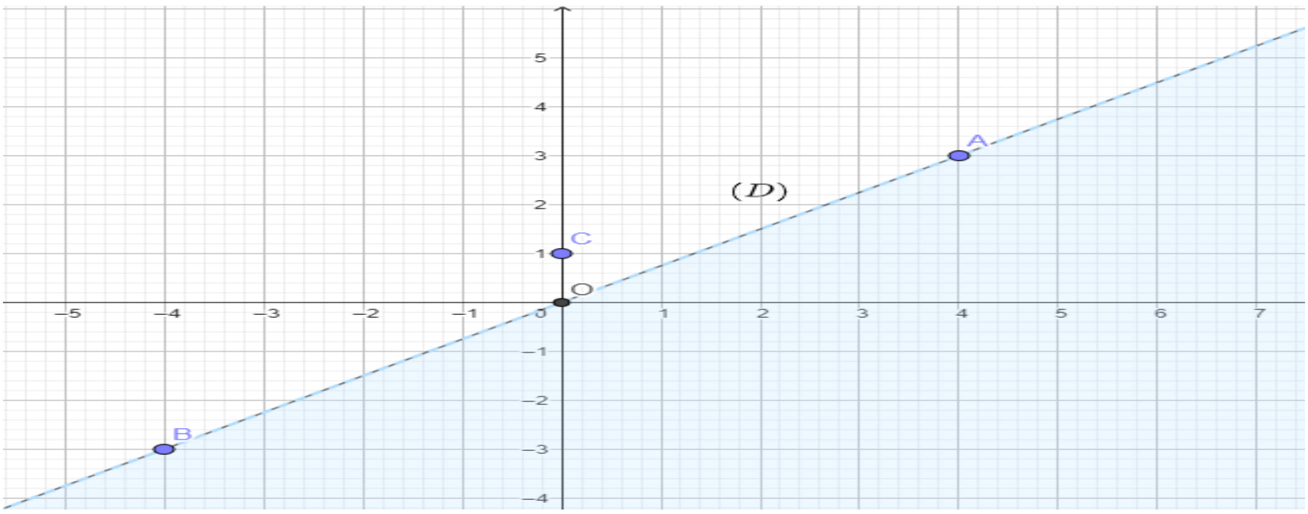
(Il nous reste à trouver lequel des deux demis plans qui est la Solution de l'inéquation.)
(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.

Conseil : On choisit, de référence, le point « O » de coordonnées (0 ; 0) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés.

Puisque la droite passe par « O », on prendra un autre point

Soit $C(0;1)$ On a $3\times 0-4\times 1=-4\le 0$ Donc : les coordonnes $(0;1)$ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les Solutions de l'inéquation $3x-4y>0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan P_1 colorée en bleu qui ne contient pas le point $C(0;1)$ et privé de la droite (D)



Exercice09 : Etudier le signe de : $E(x)=(x-3)^2-(3x+1)^2$

Solution : $E(x)=(x-3)^2-(3x+1)^2$

Première étape : On factorise. $E(x)=(x-3)^2-(3x+1)^2$

On reconnait dans ce cas, la troisième identité remarquable : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$E(x)=(x-3)^2-(3x+1)^2$ Equivaut à : $E(x)=[(x-3)-(3x+1)][(x-3)+(3x+1)]$

Equivaut à : $E(x)=(x-3-3x-1)(x-3+3x+1)$

Equivaut à : $E(x)=(-2x-4)(4x-2)$

Deuxième étape : on construit un tableau de signes.

$-2x-4=0$ Equivaut à : $-2x=4$ Equivaut à : $x=-2$

$4x-2=0$ Equivaut à : $4x=2$ Equivaut à : $x=\frac{1}{2}=0,5$

x	$-\infty$		-2		$0,5$		$+\infty$
$4x-2$		-		-	0	+	
$-2x+4$		+	0	-		-	
$(4x-2)(-2x-4)$		-	0	+	0	-	

• Si : $x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ alors : $E(x)<0$

• Si : $x\in\left]-2,\frac{1}{2}\right[$ alors : $E(x)>0$

• Si : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ alors : $E(x)=0$

Exercice10 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $\frac{4x-2}{3x+6}\geq 0$ 2) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}\geq 0$ 3) $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}\geq 0$

Solution :1) $\frac{5x-2}{3x+6}\geq 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si : $3x+6\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) Résolvons l'inéquation : $4x-2=0$ Signifie $x=\frac{1}{2}$

Donc le tableau des Signes est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4x-2}{3x+6}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$ d) $6x^2 - x - 1 = 0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$: a = 2, b = -1 et c = -6
Donc : Δ = b² – 4ac = (-1)² – 4 x 2 x (-6) = 49.
Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$ donc : $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$

Et le trinôme $2x^2 - x - 6$ a une forme factorisée : $2x^2 - x - 6 = a\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2 - x - 6 = a\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc :Δ = b² – 4ac = (-3)² – 4 x 2 x $\frac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$ a une forme factorisée :$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$: a = 1, b = 3 et c = 10
Donc : Δ = b² – 4ac = 3² – 4 x 1 x 10 = -31.
Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S = \varnothing$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$. On a : $\Delta = 1 + 24 = 25$: $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ par suite : $R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Exercice12 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique (ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60 = np$ et $60 = (n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2 + 3n - 180 = 0$

Calcul du discriminant : Δ = 3 ² +4 x 180 x 1 =729$\succ 0$

La solution est : $n_1 = \frac{-3+\sqrt{729}}{2\times 1} = 12$ et $n_2 = \frac{-3-\sqrt{729}}{2\times 1} = -15$

Nous rejetons $n_2 = -15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets

Exercice13 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

2) Déterminer une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

Solution :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Équivaut à : $\left(x^2\right)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

Je pose : $X = x^2$ l'équation devienne : $X^2 - 7X + 12 = 0$

Le discriminant de : $X^2 - 7X + 12 = 0$ est : $\Delta = (-7)^2 - 4\times1\times12 = 49 - 48 = 1 > 0$ et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{7-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{7+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{8}{2} = 4$

C'est-à-dire : $x^2 = 3$ ou $x^2 = 4$

C'est-à-dire : $x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \mp 2$

Donc l´équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ admet pour ensemble de solutions :

$S = \left\{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\right\}$

2) Résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

On a une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré :

$x^4 - 7x^2 + 12 = 1(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$ Équivaut à : $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x) > 0$ est : $S = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

Exercice14 : Soit : $P(x) = x^3 - 3x + 2$

1)a) Calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-1)Q(x)$

b) Vérifier que $P(x) = (x+2)(x-1)^2$

2) Soit α un réel tel que : $1 < \alpha < 2$

Donner un encadrement de $\alpha + 2$ et de $(\alpha - 1)^2$ et en déduire que : $0 < P(\alpha) < 4$

Solution :1) a) $P(x) = x^3 - 3x + 2$

$P(1) = 1^3 - 3\times1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

Donc $P(x)$ soit divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\
+ & -x^3 + x^2 & \\
\hline
 & x^2 - 3x + 2 & x^2 + x - 2 \\
 & -x^2 + x & \\
\hline
 & -2x + 2 & \\
 & 2x - 2 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Donc : $P(x) = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right)$

b) vérifions que $P(x) = (x+2)(x-1)^2$?

$(x+2)(x-1)^2 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 1\right)$

$= x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 2 = P(x)$

2) $1 < \alpha < 2$ donc $3 < \alpha + 2 < 4\ (1)$ c'est-à-dire : $0 < \alpha - 1 < 1$ donc $0 < (\alpha - 1)^2 < 1\ (2)$

De (1) et (2) on a alors : $0 < (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2 < 4$ par suite : $0 < P(\alpha) < 4$

Exercice15 : Soit le polynôme suivant (E) : $P(x) = x^3 - \sqrt{3}x^2 - 4x + 4\sqrt{3}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x) = (x+2)\left(x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}\right)$

3) On pose : $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta = \left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x) = 0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x - \left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x} + 2\sqrt{3} = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$

Solution : 1) $P(-2) = (-2)^3 - \sqrt{3}(-2)^2 - 4(-2) + 4\sqrt{3}$

$P(-2) = -8 - 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} = 0$ Donc : **-2** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}\right) = x^3 - \left(\sqrt{3}+2\right)x^2 + 2\sqrt{3}x + 2x^2 - 2\left(\sqrt{3}+2\right)x + 4\sqrt{3}$

$$= x^3 - \sqrt{3}x^2 - 2x^2 + 2\sqrt{3}x + 2x^2 - 2\sqrt{3}x - 4x + 4\sqrt{3}$$

$$= x^3 - \sqrt{3}x^2 - 4x + 4\sqrt{3} = P(x)$$

3) On pose : $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}$ $a = 1$ et $b = -\left(\sqrt{3}+2\right)$ et $c = 2\sqrt{3}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\left(\sqrt{3}+2\right)\right)^2 - 4\times 2\sqrt{3}\times 1 = \left(\sqrt{3}+2\right)^2 - 8\sqrt{3}$

$\Delta = \sqrt{3}^2 + 2\times 2\times\sqrt{3} + 2^2 - 8\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 - 4\sqrt{3} + 2^2 = \left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}$

Puisque : $\Delta \succ 0$ donc il y'a deux racines :

$x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}+2+\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times 1}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}-2-\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times 1}$

Or on a: $2 \succ \sqrt{3}$ car $(2)^2 \succ \left(\sqrt{3}\right)^2$ donc : $\sqrt{3} - 2 \prec 0$

Par suite: $\left|\sqrt{3}-2\right| = -\left(\sqrt{3}-2\right) = 2 - \sqrt{3}$

Donc: $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}{2\times 1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{2\times 1} = \sqrt{3}$ par suite: $S = \left\{\sqrt{3}, 2\right\}$.

4) $x - \left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x} + 2\sqrt{3} = 0$ est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x} + 2\sqrt{3} = 0$.

On pose : $X = \sqrt{x}$ et on a donc : $X^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)X + 2\sqrt{3} = 0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1 = \sqrt{3}$ et $X_2 = 2$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1} = \sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2} = 2$ donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2 = (2)^2$

Qui Signifie que: $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$ par suite: $S = \{3, 4\}$

5) On a: $P(x) = (x+2)\left(x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}\right)$

$P(x) = 0$ Signifie $x+2=0$ ou $x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3} = 0$

Signifie que : $x_0 = -2$ ou $x_1 = \sqrt{3}$ ou $x_2 = 2$ Par suite: $S = \left\{-2, 2, \sqrt{3}\right\}$

6) $P(x) \geq 0$ Signifie que: $(x+2)\left(x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}\right) \geq 0$

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left[-2; \sqrt{3}\right] \cup [2; +\infty[$

Exercice16 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = 0 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)x + \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 44 \end{cases}$

Solution :1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2(x-2y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow -2y = 1 - x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

Donc le système admet une infinité de solutions : $S = \left\{\left(x; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) / x \in \mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -x + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ On multiplie les 2 iem équations par -3

On aura : $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ donc 2=1 Impossible donc : $S = \varnothing$

3) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x + \left(\sqrt{2}-1\right)y = 0 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)x + \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$\Delta = \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) - \left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - (1)^2\right)$ Donc : $\Delta = (5-3) - (2-1) = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1} = -\sqrt{2}+1 = 1-\sqrt{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{5}-\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2}+1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1} = -\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{5}$$

Donc **:** $S = \left\{\left(1-\sqrt{2}, \sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

4) $\begin{cases} x+y=11 \\ x^2-y^2=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ (x+y)(x-y)=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ 11(x-y)=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=4 \end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve : $x+y+x-y=11+4$ c'est-à-dire : $2x=15$

Donc : $x=\frac{15}{2}$ et par suite : $\frac{15}{2}+y=11$ donc : $y=\frac{7}{2}$ alors on a : $S=\left\{\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice17 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : $\sqrt{x-1}=2$ et $\frac{1}{2y+1}=-1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\frac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$

Solution : 1) soit $x\geq 1$: a) $\sqrt{x-1}=2$ équivalent : $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2^2$ équivalent : $x-1=4$

Équivalent : $x=5$

Donc : $S=\{5\}$

a) soit $y\neq -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2y+1}=-1$ équivalent : $2y+1=-1$ équivalent : $2y=-2$ Équivalent : $y=-1$

Donc : $S=\{-1\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 6x-10y=22 & (\times 2) \\ -6x+3y=-15 & (\times 3) \end{cases}$

Donc : la somme des équations donne : $6x-10y-6x+3y=22-15$

Équivalent : $-7y=7$ Équivalent : $y=-1$

On a : $-2x+y=-5$ donc : $-2x-1=-5$ Équivalent : $x=2$

La solution du système est donc : $S=\{(2,-1)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\frac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\frac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-5\frac{1}{2y+1}=11 \\ -2\sqrt{x-1}+\frac{1}{2y+1}=-5 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x-1} \\ Y=\frac{1}{2y+1} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X-5Y=11 \\ -2X+Y=-5 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=2$ et $Y=-1$

Donc : $\sqrt{x-1}=2$ et $\frac{1}{2y+1}=-1$ Équivalent : $x=5$ et $y=-1$

Par suite : $S=\{(5,-1)\}$

Exercice18 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : $(S)\ \begin{cases} 5x+y+1\geq 0 \\ -3x+y-2\leq 0 \end{cases}$

Solution : L'équation de la droite (D_1): $5x+y+1=0$

L'équation de la droite (D_2): $-3x+y-2=0$

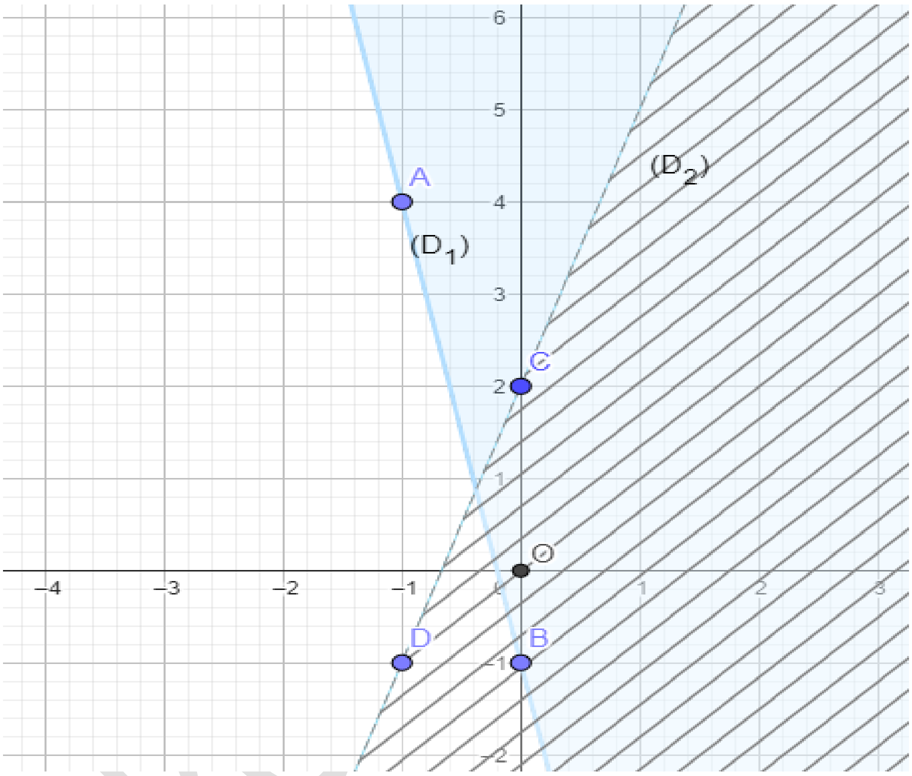
Soit $O(0;0)$ On a $0+0+1\geq 0$ équivalent à : $1\geq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $5x+y+1\geq 0$

Pour $O(0;0)$: On a $0+0-2\leq 0$ Équivalent à : $-2\leq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $-3x+y-2\leq 0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan coloré en bleu et hachurés



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien