Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ 2) $\frac{-x+5}{2x-6}=-3$ 3) $x^3-5x=0$ 4) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

Corrigé : 1) $\frac{(2x-10)(x-7)}{x^2-49}=0$

Cette équation existe si : $x^2-49=0$

$x^2-49=0$ Équivalent à : $x^2-7^2=0$ équivalent à : $(x+7)(x-7)=0$

Équivalent à $x+7=0$ ou $x-7=0$ équivalent à : $x=-7$ ou $x=7$

Les valeurs interdites de cette équation sont -7 et 7. L'équation est donc définie sur :

$D_E=\mathbb{R}-\{-7,7\}$

$\frac{(2x-10)(x-7)}{x^2-49}=0$ Équivalent à $(2x-10)(x-7)=0$ équivalent à $x-7=0$ ou $2x-10=0$

Équivalent à $x=5\in D_E$ ou $x=7\notin D_E$

Donc : $S=\{5\}$

2) $\frac{-x+5}{2x-6}=-3$ Cette équation n'existe pas si $2x-6=0$

$2x-6=0$ Équivalent à : $x=3$

La valeur interdite de cette équation est 3. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}-\{3\}$

$\frac{-x+5}{2x-6}=-3$ Équivalent à : $-x+5=-3(2x-6)$ équivalent à : $-x+5=-6x+18$

Équivalent à : $5x=13$ équivalent à : $x=\frac{13}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{13}{5}\right\}$

3) $x^3-5x=0$ équivalent à : $x\left(x^2-5\right)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2=5$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

D'où : $S=\left\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\right\}$

4) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

● a). On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x\neq 0$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_G=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

● b) On résoud l'équation :

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ Signifie que : $x^2=x$ Signifie que : $x^2-x=0$ Signifie que : $x(x-1)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$

Signifie que : $x=0\notin D_G=\mathbb{R}^*$ ou $x=1$

Donc : l'´équation (G) a une unique solution

Donc : $S=\{1\}$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : 1) $\frac{1}{2}x-5y+3=0$ 2) $3x-\frac{1}{2}=5y+8$

Corrigé :1) On a $\frac{1}{2}x-5y+3=0$ équivalent à : $\frac{x}{2}=5y-3$ Équivalent à : $x=10y-6$

Donc : $S=\{(10y-6;y)/\ y\in\mathbb{R}\}$

2) On a $3x-\frac{1}{2}=5y+8$ équivalent à : $2\times\left(3x-\frac{1}{2}\right)=2\times(5y+8)$

Équivalent à : $6x-1-16=10y$ Équivalent à : $6x-11=10y$

Équivalent à : $\frac{6x-11}{10}=y$ Équivalent à : $y=\frac{6x}{10}-\frac{11}{10}$ Équivalent à : $y=\frac{3}{5}x-\frac{11}{10}$

Donc : $S=\left\{\left(x;\frac{3}{5}x-\frac{11}{10}\right)/\ x\in\mathbb{R}\right\}$

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $|x-2|-|4-x|-1=0$ 2) $|x+1|+|x-2|=|x-3|$

Corrigé :1) $|x-2|-|4-x|-1=0$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$4-x=0$ Signifie que : $x=4$

x	$-\infty$		2		4	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$x-2$		$x-2$	
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$	
$\lvert x+2\rvert$	$4-x$		$4-x$		$x-4$	
$\lvert x-2\rvert-\lvert 4-x\rvert-1$	-3		$2x-7$		1	

Si : $x\le 2$ alors :

$|x-2|-|4-x|-1=0$ devient :

$-3=0$ impossible donc : $S_1=\varnothing$

Si : $2\le x\le 4$ alors : l'équation devient : $2x-7=0$ Ce qui Signifie que : $x=\frac{7}{2}\in[2;4]$

Donc : $S_2=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Si : $x\ge 4$ alors : l'équation devient $1=0$ impossible donc : $S_3=\varnothing$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

2) $|x+1|+|x-2|=|x-3|$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$x-3=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$		-1		2		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	

PROF: ATMANI NAJIB

Si : $x \le -1$ alors : l'équation devient : $-(x+1)-(x-2)=-(x-3)$

Signifie que : $-x-1-x+2=-x+3$

Signifie que : $x=-2 \le -1$

Donc : $S_1=\{-2\}$

Si : $-1 \le x \le 2$ alors : l'équation devient : $(x+1)-(x-2)=-(x-3)$

Ce qui Signifie que : $x+1-x+2=-x+3$

Signifie que : $x=0 \in [-1;2]$ Donc : $S_2=\{0\}$

Si : $2 \le x \le 3$ alors : l'équation devient : $(x+1)+(x-2)=-(x-3)$

Ce qui Signifie que : $x+1+x-2=-x+3$

Signifie que : $3x=4$

Signifie que : $x=\frac{4}{3} \notin [2;3]$ Donc : $S_3=\varnothing$

Si : $x \ge 3$ alors : l'équation devient $x+1+x-2=x-3$

Signifie que : $x=-2 \notin [3;+\infty[$ donc : $S_4=\varnothing$

Par conséquent : $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4=\{-2;0\}$

Exercice04: 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$\frac{2x-1}{x-m}=m$

Corrigé : ● 1. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $x-m \neq 0$ qui signifie que : $x \neq m$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{m\}$

● 2. On résoud l'équation : $\frac{2x-1}{x-m}=m$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{m\}$: on va écrire cette équation sous la forme : $ax=b$

$\frac{2x-1}{x-m}=m$ Signifie que : $2x-1=m(x-m)$ Signifie que : $2x-1=mx-m^2$

Signifie que : $2x-mx=1-m^2$

Signifie que : $(2-m)x=1-m^2$

1ére cas : $m \neq 2$: Alors : $2-m \neq 0$

Alors : $\frac{2x-1}{x-m}=m$ Équivalent à : $x=\frac{1-m^2}{2-m}$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{1-m^2}{2-m}$

Par suite : $S=\left\{\frac{1-m^2}{2-m}\right\}$

2ére cas : $m=2$: L'équation devient : $0x=1-2^2$ Équivalent à : $0=-3$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice05 : Déterminer le signe des expressions suivantes :

1) $A(x)=2x-3$ 2) $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$ 3) $G(x)=\frac{(x-5)(x+1)}{x-2}$

Corrigé :1) Etude du signe d'une expression : Méthodes

• Si c'est une expression affine, je résous une inéquation.

• Si c'est un polynôme de dégrée supérieur ou égal à 3 ou bien une fraction rationnelle, je fais un tableau de signes.

PROF: ATMANI NAJIB

1) $A(x)=2x-3$

$A(x)=0$ Equivaut à : $2x-3=0$ Equivaut à : $x=\frac{3}{2}$ on a : $a=2>0$

Le tableau du signe est :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

- Si : $x\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ alors : $A(x)>0$
- Si : $x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$ alors : $A(x)<0$
- Si : $x=\frac{3}{2}$ alors : $A(x)=0$

2) $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$

Qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$F(x)>0$ Équivaut à : $x\in\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x)>0$ est : $S=\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

3) $G(x)=\frac{(x-5)(x+1)}{x-2}$

- On va déterminer le domaine de définition de $G(x)$:

$G(x)$Est définie si et seulement si $x-2\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 2$

Donc : le domaine de définition de G est : $D_G=\mathbb{R}-\{2\}$

- $x-5=0$ Équivaut à : $x=5$ et $x+1=0$ qui signifie que : $x=-1$ et $x-2=0$ qui signifie que : $x=2$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- Si : $x\in]-\infty,-1[\cup]2,5[$ alors : $G(x)<0$
- Si : $x\in]-1,2[\cup]5,+\infty[$ alors : $G(x)>0$
- Si : $x=-1$ *ou* $x=5$ alors : $G(x)=0$ et $G(x)$N'est pas définie si $x=2$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2}{2x-3} \le 4$

Corrigé : Méthode : résoudre une inéquation du type : A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)

- 1. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation
- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.
- 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

Résolution dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{2}{2x-3} \le 4$

- 1. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si : $2x-3 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq \frac{3}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{2}{2x-4} \le 4$ Equivaut à : $\frac{2}{2x-4} - 4 \le 0$ équivaut à : $\frac{2}{2x-3} - \frac{4(2x-3)}{2x-3} \le 0$

Équivaut à : $\frac{2-4(2x-3)}{2x-3} \le 0$ Équivaut à : $\frac{2-8x+12}{2x-3} \le 0$ Équivaut à : $\frac{-8x+14}{2x-3} \le 0$

- 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

$-8x+14=0$ Équivaut à : $x=-\frac{7}{4}$ et $2x-3=0$ qui signifie que : $x=\frac{3}{2}=1,5$

Remarque :7/4 > 1,5 et 1,5 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur $2x-3$.

x	$-\infty$		$1,5$		$7/4$		$+\infty$
$-8x+14$	+		+	0	-		
$2x-3$	-	0	+		+		
$\frac{-8x+14}{2x-3}$	-	‖	+	0	-		

Donc : $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$

Exercice07 : Deux opérateurs téléphoniques proposent les tarifs suivants : 0,16 DH la minute avec un abonnement de 12 DH pour le premier et 0,28 DH sans abonnement pour le second. Pour quelles durées de communication le premier opérateur est-il plus avantageux ?

Corrigé : Soit x la durée du temps de communication.

Avec le premier opérateur, le tarif est : $f(x) = 0,16x+12$

Avec le deuxième opérateur, le tarif est : $g(x) = 0,28x$

Le premier opérateur est plus intéressant si : $f(x) < g(x)$

Soit : $0,16x+12 < 0,28x \Leftrightarrow 12 < 0,12x \Leftrightarrow \frac{12}{0,12} < x \Leftrightarrow 100 < x$

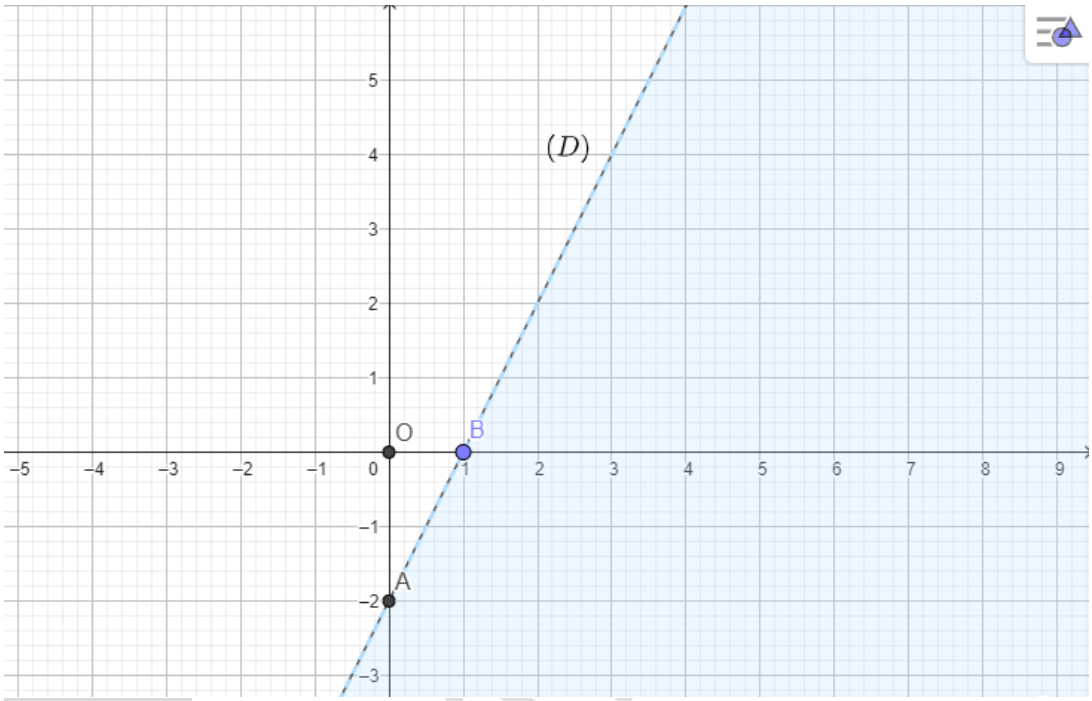
Exercice08 : Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $2x-y-2>0$

Corrigé : De l'inéquation précédente on en déduit : l'équation de la droite (D) : $2x-y-2=0$

Cette droite passe par les points $A(0;-2)$ et $B(1;0)$ et détermine deux demi-plans P_1 et P_2

PROF: ATMANI NAJIB

(Il nous reste à trouver lequel des deux demis plans qui est la Solution de l'inéquation.)
(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.
Conseil : On choisit, de référence, le point « O » de coordonnées (0 ; 0) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés. (Si la droite passe par « O », on prendra un autre point…)
Soit $O(0;0)$ On a $2\times 0-0-2<0$
Donc : les coordonnes (0 ; 0) ne vérifie pas l'inéquation.
Donc les Solutions de l'inéquation $2x-y-2<0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan P_1 colorée en bleu qui ne contient pas le point $O(0;0)$ et privé de la droite (D)



Exercice09 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x^2-3y^2=-67 \\ 4x^2-y^2=11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases} (I)$

Solution : 1) Pour résoudre le système on va poser : $\begin{cases} X=x^2 \\ Y=y^2 \end{cases}$ On obtient alors le système suivant :

$\begin{cases} 2X-3Y=-67 \\ 4X-Y=11 \end{cases}$ Qui Signifie que : $\begin{cases} 2X-3Y=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} 2X-3(4X-11)=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} 2X-12X+33=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} -10X=-100 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=4X-11 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=40-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=29 \end{cases}$

Donc : $X=10$ et $Y=29$ et puisque on a noté : $\begin{cases} X=x^2 \\ Y=y^2 \end{cases}$

Donc : $x^2=10$ et $y^2=29$

Donc : ($x=\sqrt{10}$ ou $x=-\sqrt{10}$) et ($y=\sqrt{29}$ ou $y=-\sqrt{29}$)

Donc : ($x=\sqrt{10}$ et $y=\sqrt{29}$) ou ($x=-\sqrt{10}$ et $y=\sqrt{29}$) ou ($x=\sqrt{10}$ et $y=-\sqrt{29}$) ou ($x=-\sqrt{10}$ et $y=-\sqrt{29}$)

Par suite : $S=\left\{\left(\sqrt{10},\sqrt{29}\right);\left(-\sqrt{10},\sqrt{29}\right);\left(\sqrt{10},-\sqrt{29}\right);\left(-\sqrt{10},-\sqrt{29}\right)\right\}$

2)On considère le système suivant : $\begin{cases}x-2y=1\\x-y=3\end{cases}(I')$ On a pour (I'): $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$

Donc : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{5}{1}=5$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}4&-2\\1&-11\end{vmatrix}}{-14}=\dfrac{-42}{-14}=3$

Donc : $(-2,3)$ est une solution du système : $(I')\begin{cases}x-2y=1\\x-y=3\end{cases}$

Mais on remplaçant dans l'équation $3x+y=2$ on a : $3\times 5+2=17\neq 2$

Donc : $(-2,3)$ ne vérifie pas l'équation $3x+y=2$ Par suite : $S=\varnothing$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x^2-4x+6=0$ 2) $x^2-4x-21=0$

3) $3x^2-6x+3=0$ 4) $3x-15\sqrt{x}+18=0$

Solution : 1) $2x^2-4x+6=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 2\times 6=16-48=-32<0$

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

2) $x^2-4x-21=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times 1}$ et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{4+10}{2}=\dfrac{14}{2}=7$ et $x_2=\dfrac{4-10}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$ Donc : $S=\{-3,7\}$

3) $3x^2-6x+3=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times 3\times 3=36-36=0$

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x=\dfrac{-(-6)}{2\times 3}=\dfrac{6}{6}=1$ c'est-à-dire : $S=\{1\}$

4) $3x-15\sqrt{x}+18=0$ avec : $x\geq 0$

Faisons un changement de variable en posant : $t=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $3t^2-15t+18=0$

Δ = $(-15)^2$ – 4 x 3 x 18 = 225-216=9$\succ 0$

Les solutions de : $3t^2-15t+18=0$ sont : $t_1=\dfrac{15-3}{6}=2$ et $t_2=\dfrac{15+3}{6}=3$ donc on a : $\sqrt{x}=2$ ou $\sqrt{x}=3$

Donc : $x=4$ ou $x=9$ Par suite : $S=\{4;9\}$

Exercice11 : La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470. Quel est le premier de ces nombres ?

Solution : Appelons x le premier de ces trois nombres. x vérifie l'équation :

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=3470$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=3470$

Donc : $3x^2+6x+5=3470$

Donc : $3x^2+6x-3465=0$

Calculons delta : $\Delta=5^2-4\times3\times(-3465)=36+41580=41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{41616}}{2\times3}=\dfrac{-6-204}{6}=\dfrac{-210}{6}=-35$

Et $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{41616}}{2\times3}=\dfrac{-6+204}{6}=\dfrac{198}{6}=33$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $4x^4+4x^2-3=0$

2) Déterminer une factorisation de $4x^4+4x^2-3$.

3) En déduire une résolution de l'inéquation : $4x^4+4x^2-3\geq0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.

Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$4x^4+4x^2-3=0$ Équivaut à : $4\left(x^2\right)^2+4x^2-3=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $4X^2+4X-3=0$

Le discriminant de : $4X^2+4X-3=0$ est : $\Delta=4^2-4\times4\times(-3)=16+48=64>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times4}=\dfrac{-12}{8}=-\dfrac{3}{2}$ et $X_2=\dfrac{-4+\sqrt{64}}{2\times4}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire : $x^2=-\dfrac{3}{2}$ impossible ou $x^2=\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire : $x=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc l´équation $4x^4+4x^2-3=0$ admet pour ensemble de solutions : $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2) Déterminons une factorisation de $4x^4+4x^2-3$.

On a : $4X^2+4X-3=4\left(X+\dfrac{3}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)=(2X+3)(2X-1)$

Donc une factorisation de $4x^4+4x^2-3$ en un produit de trinômes est :

$4x^4+4x^2-3=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)$

3) Résolution de l'inéquation : $4x^4+4x^2-3\geq0$

On a : $4x^4+4x^2-3=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)$ et $2x^2+3>0$

$4x^4+4x^2-3\geq0$ Équivaut à : $2x^2-1\geq0$

$2x^2-1=0$ Signifie que : $x^2=\dfrac{1}{2}$ Signifie que : $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

PROF: ATMANI NAJIB

$4x^4+4x^2-3\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) (I) ; $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ 2) (E) ; $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$

Corrigé : 1) Partie1 : L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est donc $D_E=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

Partie2 : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}-2\leq 0$

Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9-2x^2+10}{x^2-5}\leq 0$

Equivaut à : $\frac{2x^2-3x+1}{x+5}\leq 0$ Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

Δ = 1 > 0 donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=2$ et $x_2=3$

On obtient le tableau de signes suivant :
(On termine la résolution)

2)On remarque tout d'abord que sur :] −∞ ; 1[, x − 1 < 0 donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque : $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$

On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle [1 ; +∞[.
Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$\sqrt{|x-3|}\leq x-1$ Equivaut à : $|x-3|\leq(x-1)^2$

Equivaut à : $|x-3|\leq x^2-2x+1$

Comme $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$ on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire
Disparaître la valeur absolue :

• Sur [1 ; 3[: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $-(x-3)\leq x^2-2x+1$

Equivaut à : $-x+3\leq x^2-2x+1$
Equivaut à : $0\leq x^2-2x-2$
On calcule le discriminant du polynôme x^2-2x-2 : Δ = 9 > 0 donc x^2-2x-2 admet deux racines
Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=2$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l'étude à l'intervalle [1 ; 3[, donc on ne retient que les x ∈ [2 ; 3[.

• Sur [3 ; +∞ [: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $x-3\leq x^2-2x+1$

Equivaut à : $0\leq x^2-3x+4$
On calcule le discriminant du polynôme x^2-3x+4 : Δ = −7 < 0.
Donc ; le signe de x^2-3x+4 est du signe de $a=1$ par suite : $x^2-3x+4>0$

Donc, tous les x ∈ [3 ; +∞ [sont solutions de l'inéquation étudiée sur l'intervalle [3 ; +∞[.
Au final, S = [2 ; 3[∪ [3 ; +∞ [= [2 ; +∞ [.

Exercice14: Soit : $P(x)=-3x^3-8x^2-3x+2$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+1$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$

Montrer que : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec $Q(x)=-3x^2-5x+2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

Solution :1) $P(x)=-3x^3-8x^2-3x+2$

On a $P(-1)=-3\times(-1)^3-8(-1)^2-3\times(-1)+2=+3-8+3+2=0$ donc --1 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+1$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$

$$\begin{array}{r|l} -3x^3-8x^2-3x+2 & x+1 \\ \hline +3x^3+3x^2 & \\ \hline -5x^2-3x+2 & -3x^2-5x+2 \\ +5x^2+5x & \\ \hline 2x+2 & \\ -2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec : $Q(x)=-3x^2-5x+2$

3) $Q(x)=-3x^2-5x+2$ et $Q(x)=0$

Δ = (-5) ^{2} – 4 x 2x (-3) =25+ 24 = 49

Donc : $x_1=\frac{5-\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\frac{12}{-6}=-2$

Par suite: $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ Sont : $x_2=-2$ et $x_1=\frac{1}{3}$.

Donc le tableau de signe est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=]-\infty;-2[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec $Q(x)=-3x^2-5x+2$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=\frac{1}{3}$ et $x_2=-2$.

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=-3(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)=(-3x+1)(x+2)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+1)(-3x+1)(x+2)$

6) On a : $P(x)=(x+1)(-3x+1)(x+2)$.

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+1)(-3x+1)(x+2)=0$

Signifie : $x+1=0$ ou $-3x+1=0$ ou $x+2=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie : $x=-1$ ou $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-2$ par suite : $S=\left\{-2,-1,\frac{1}{3}\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+1)Q(x)<0$

x	$-\infty$		-2		-1		$1/3$	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$	$-$	0	$-$		$+$		$+$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc: $S=]-2;-1[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Exercice15 : Soit le polynôme suivant : $P(x)=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)x^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)x-4\sqrt{6}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant

a) vérifier que : $\Delta=14+4\sqrt{6}$ et compléter : $14+4\sqrt{6}=(...+....)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : 1) $P(-2)=(-2)^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)(-2)^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)(-2)-4\sqrt{6}$

$P(-2)=-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}=0$

-2 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x^2-2\sqrt{6}x+2x^2+2\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-4\sqrt{6}$

$=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)x^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)x-4\sqrt{6}=P(x)$

3) a) On pose : $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant :

$a=1$; $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $c=-2\sqrt{6}$ et $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4\times\left(-2\sqrt{6}\right)\times 1$

$\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$\Delta=12+4\sqrt{6}+2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$ Par suite : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

3)b) $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

Puisque : $\Delta\succ 0$ donc il y'a deux racines : $x_1=\frac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

PROF: ATMANI NAJIB

ET $x_2=\dfrac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ 0$ par suite : $\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=-2\sqrt{3}$ Par suite: $S=\left\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\right\}$

4) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$

Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ qui Signifie que: $x_2=2$ Par suite: $S=\{2\}$

5) $Q(x)\geq 0$ on a $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

Donc: le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

6) On a : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+2=0$ ou $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Signifie: $x_0=-2$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=-2\sqrt{3}$ Donc: $S=\left\{-2,\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

7) $P(x)\leq 0$ Signifie: $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)\leq 0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[-2;\sqrt{2}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien