Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes
- ✓ TRIGONOMÉTRIE1(15%)

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(1-2x)(2x+6)}{x-1}=0$ 2) $\frac{(x-2)(2x+1)}{x^2-4}=0$

Corrigé : 1) $\frac{(1-2x)(2x+6)}{x-1}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x-1\neq 0$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{1\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(1-2x)(2x+6)}{x-1}=0$ Signifie : $(1-2x)(2x+6)=0$

Signifie : $2x+6=0$ ou $1-2x=0$

Signifie : $x=-3$ ou $x=\frac{1}{2}$ et par suite : $S=\left\{-3;\frac{1}{2}\right\}$

2) $\frac{(x-2)(2x+1)}{x^2-4}=0$

On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x^2-4\neq 0$

$x^2-4=0$ Signifie : $x^2=4$ signifie : $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(x-2)(2x+1)}{x^2-4}=0$ Signifie : $(x-2)(2x+1)=0$

Signifie : $2x+1=0$ ou $x-2=0$

Signifie : $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=2\in D_E$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Donc : $S=\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};\frac{7}{6}\right]$

Exercice02 : 1) Résoudre les équations :

a) $3|x-5|=2|4-3x|$ b) $-2|2x-13|=1$ c) $(x-2)^2-|x-2|=0$

2) Résoudre les inéquations : a) $|2x+1|\leq 4$ b) $|x-9|\geq\frac{1}{2}$ c) $2<|x|<3$

Corrigé :1) a) **Égalité de deux valeurs absolues :**
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |3| = |−3|

$3|x-5|=2|4-3x|$ Signifie que : $|3x-15|=|8-6x|$

Signifie que : $3x-15=8-6x$ ou $3x-15=-(8-6x)$

Signifie que : $9x=23$ ou $-3x=7$

Signifie que : $x=\frac{23}{9}$ ou $x=-\frac{7}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{7}{3};\frac{23}{9}\right\}$

b) $-2|2x-13|=1$ Signifie que : $|2x-13|=-\frac{1}{2}$

Donc : $S=\varnothing$ car la valeur absolue est toujours positive

c) $(x-2)^2-|x-2|=0$ Signifie que : $|x-2|^2-|x-2|=0$ car $|X|^2=X^2$

Signifie que : $|x-2|(|x-2|-1)=0$

Signifie que : $|x-2|=0$ ou $|x-2|-1=0$

Signifie que : $x-2=0$ ou $|x-2|=1$

Signifie que : $x-2=0$ ou $x-2=1$ ou $x-2=-1$

Signifie que : $x=2$ ou $x=3$ ou $x=1$

Donc : $S=\{1;2;3\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|2x+1|\leq 4$

Règle : $|x-a|\leq r$ est équivalente à : $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x+1|\leq 4$ Signifie que : $-4\leq 2x+1\leq 4$

Signifie que : $-4-1\leq 2x+1-1\leq 4-1$

Signifie que : $-5\leq 2x\leq 3$

Signifie que : $-\frac{5}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}$

Donc : $S=\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq\frac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\frac{1}{2}$ Signifie que : $x\geq\frac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq\frac{19}{2}$ ou $x\leq-\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2<|x|<3$

$2<|x|<3$ Signifie que : $|x|<3$ et $|x|>2$

• Résolution de l'inéquation : $|x|<3$

$|x|<3$ Signifie que : $-3<x<3$

Donc : $S_1=]-3;3[$

• Résolution de l'inéquation : $|x| > 2$

$|x| > 2$ Signifie que : $x > 2$ ou $x < -2$

Donc : $S_2 =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 =]-3;3[\cap \left( ]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[\right)$

Donc : $S =]-3;-2[\cup]2;3[$

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{5}{3}(2x+1)-\frac{1}{2}(x-2)<\frac{7}{6}(x+2)$ 2) $-x+4(x-1)\leq 3x$ 3) $4(x-3)-(3x-10)>x+5$

Corrigé : 1) On multiplie par le dénominateur commun, ici 6, ce qui Equivaut à :
$10(2x+1)-3(x-2)<7(x+2)$) Equivaut à : $20x+10-3x+6<7x+14$

Equivaut à : $20x-3x-7x\leq -10-6+14$
Equivaut à : $10x\leq -2$

On divise par 10, on ne change pas la relation d'ordre ce qui Equivaut à $x<\frac{-2}{10}$

Equivaut à : $x<\frac{-1}{5}$

On conclut par l'intervalle solution : Donc : $S = \left]-\infty;-\frac{1}{5}\right[$

2) $-x+4(x-1)\leq 3x$ Equivaut à : $-x+4x-4\leq 3x$

Equivaut à : $-x+4x-3x\leq 4$
On s'aperçoit en regroupant les x qu'il n'y en a plus.
On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne :
Equivaut à : $0x\leq 4$
On a donc $0\leq 4$, ce qui est toujours vrai, quel que soit les valeurs de x.
On conclut alors par : $S = \mathbb{R}$

3) $4(x-3)-(3x-10)>x+5$ Equivaut à : $4x-12-3x+10>x+5$

Equivaut à : $4x-3x-x>12-10+5$
On s'aperçoit en regroupant les x qu'il n'y en a plus.
On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne :
Equivaut à : $0x>7$
On a donc : $0>7$ ce qui est faux quel que soit les valeurs de x ; on conclut donc par : $S = \varnothing$

Remarque : Beaucoup de cas de figure peuvent se présenter, dans les inéquations, où l'on obtient $0x$.
Il faudra dans chaque cas réfléchir pour savoir si l'on se situe dans un cas toujours vrai (exemple 2) ou dans un cas impossible (exemple 2).

Exercice04 : Un commerçant dépense 75 DH pour fabriquer 150 glaces.
Le prix d'une glace est de 2,50 DH.
Combien doit-il faire de glace pour réaliser un bénéfice supérieur à 76 DH.

Corrigé : Soit x le nombre de glaces réalisées
le bénéfice est la différence entre ce que l'on gagne (les recettes) et ce que l'on a dépensé pour produire les glaces
Bénéfice = Recettes - Coûts
Donc : $Bénéfice = 2,50x-75$

On veut un bénéfice supérieur à 76 DH, soit :

$$2,50x-75>76 \Leftrightarrow x>\frac{151}{2,50} \Leftrightarrow x>60,4$$

Le commerçant aura un bénéfice supérieur à 76 DH. à partir de la 61ème glace.

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : 1) $2x-y+4=0$ 2) $x-2y+1=0$;

Corrigé : 1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

On a $2x-y+4=0$ équivalent à : $y=2x+4$

Donc : $S=\{(x;2x+4)/x\in\mathbb{R}\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $x-2y+1=0$

On a $x-2y+1=0$ équivalent à : $x=2y-1$

Donc : $S=\{(2y-1;y)/y\in\mathbb{R}\}$

Exercice06 : Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases}3x+y=5\\2x-3y=-4\end{cases}$

Par les 3 Méthodes suivantes :
1) Par la Méthode de substitution
2) Par la méthode des combinaisons linéaires
3) Méthode des déterminants

Solution : 1) Par la *Méthode de substitution :* $3x+y=5$ Signifie que : $y=5-3x$

On obtient alors le système : $\begin{cases}y=5-3x\\2x-3y=-4\end{cases}$

On va maintenant remplacer le y de la seconde équation par son expression en fonction de x qu'on vient de trouver. Cela donne alors : $\begin{cases}y=5-3x\\2x-3(5-3x)=-4\end{cases}$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : $\begin{cases}y=5-3x\\11x=11\end{cases}$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de x : $\begin{cases}y=5-3x\\x=1\end{cases}$

Maintenant qu'on connaît la valeur de x, il ne nous reste plus qu'à remplacer x par sa valeur dans la première équation. $\begin{cases}y=5-3\times1=2\\x=1\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

La solution de notre système est donc : $S=\{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité

$$\begin{cases}3\times1+2=3+2=5\checkmark\\2\times1-3\times2=2-6=-4\checkmark\end{cases}$$

2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.
On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :
multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.
Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases}6x+2y=10\\6x-9y=-12\end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

$$\begin{array}{rcrl} & 6x & + & 2y & = 10 \\ -(& 6x & - & 9y & = -12) \\ \hline & & & 11y & = 22 \\ & & \text{donc} & y & = 2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :
Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3) Méthode des déterminants : On calcule le déterminant du système suivant

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\times(-3)-2=-11\neq 0 \quad (I)\begin{cases}3x+y=5\\ 2x-3y=-4\end{cases}$$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -4 & -3\end{vmatrix}}{-11}=\frac{-15-(-4)}{-11}=\frac{-15+4}{-11}=\frac{-11}{-11}=1 \quad \text{et } y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-12-10}{-11}=\frac{-22}{-11}=2$$

Donc : $S=\{(1,2)\}$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24\end{cases}$

Solution : $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24\end{cases}$ on pose : $\begin{cases}X=\sqrt{x}\\ Y=\sqrt{y}\end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases}3X-Y=2\\ 2X+5Y=24\end{cases}$

Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=15+2=17\neq 0$

Donc : $X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 24 & 5\end{vmatrix}}{17}=\frac{34}{17}=2$ et $Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 24\end{vmatrix}}{17}=\frac{68}{17}=4$.

Donc: $X=2$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=2$ et $\sqrt{y}=4$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et $y=16$

Donc : $S=\{(4,16)\}$

Exercice08 : Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant :

$$(S)\begin{cases}x+y-1\geq 0\\ -x+2y+2\leq 0\end{cases}$$

Corrigé : L'équation de la droite (D_1) : $x+y-1=0$

L'équation de la droite (D_2) : $-x+2y+2=0$

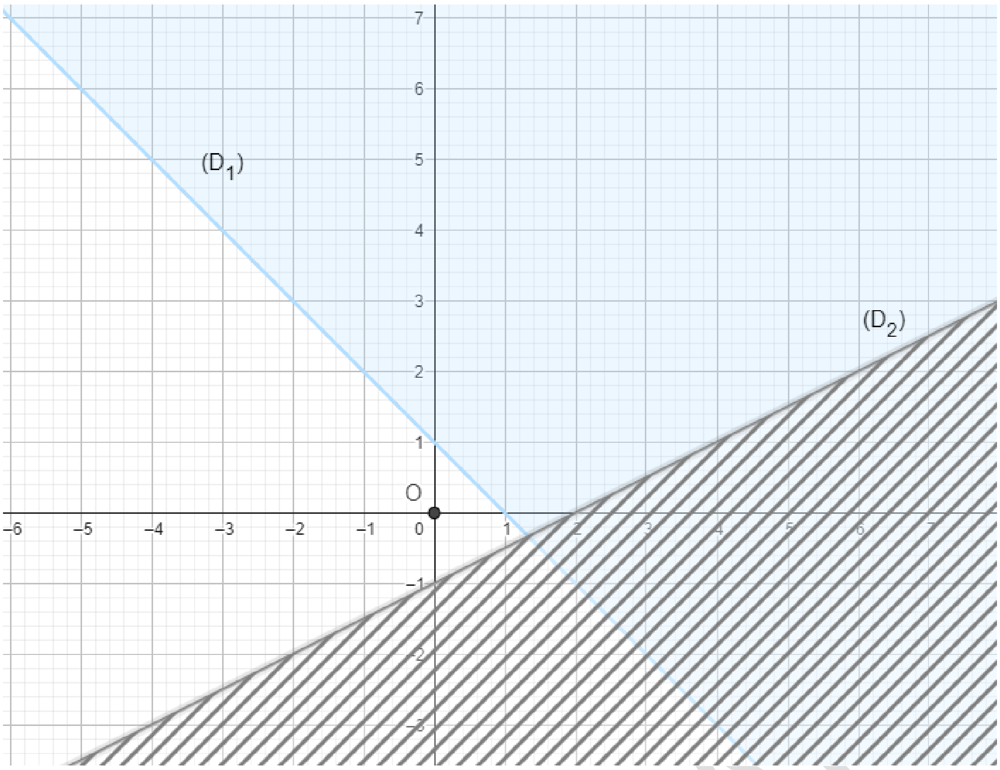
Soit $O(0;0)$ On a $0+0-1\geq 0$ équivalent à : $-1\geq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $x+y-1\geq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $-0+2\times 0+2\leq 0$ Équivalent à : $2\leq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $-x+2y+2\leq 0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan coloré en bleu et hachurés



Exercice09 : Soit le trinôme : $P(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$: (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : $P(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$ $14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E):x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

4) Déduction des solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ Peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ or l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solutions

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$

Exercice10 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ 2) $\dfrac{3x+9}{6x+2}\geq\dfrac{2x+1}{1-x}$

Solution : 1) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-x-6\neq 0$
On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :
Le discriminant est $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=25$ et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{25}}{2\times 1}=3$

Alors le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2,3\}$

b) Résolvons l'inéquation :

$\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ Signifie que : $\dfrac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$

Signifie que : $\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0$

On cherche les racines de : $-2x^2+2x+13$
Le discriminant est : $\Delta=2^2-4\times(-2)\times 13=108$

Donc : les racines de $-2x^2+2x+13$ sont : $x_2'=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ et $x_1'=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est : $S=\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

2) $\frac{3x+9}{6x+2} \geq \frac{2x+1}{1-x}$:

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes : $\frac{3x+9}{6x+2} \geq \frac{2x+1}{1-x}$ Signifie que : $\frac{3x+9}{6x+2}-\frac{2x+1}{1-x} \geq 0$

Signifie que : $\frac{(3x+9)(1-x)-(2x+1)(6x+2)}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{3x-3x^2+9-9x-12x^2-4x-6x-2}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{-15x^2-16x+7}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$ c'est-à-dire : $\frac{-(15x^2+16x-7)}{-(6x+2)(x-1)} \geq 0$

Signifie que : $\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)} \geq 0$

On cherche les racines de : $15x^2+16x-7$

Le discriminant est : $\Delta' = 16^2 - 4 \times (-7) \times 15 = 676 = 26^2$

Donc : les racines de $15x^2+16x-7$: $x_1=\frac{-16+26}{2\times 15}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-16-26}{2\times 15}=\frac{-42}{30}=-\frac{7}{5}$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$15x^2+16x-7$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]-\infty;-\frac{7}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$.

Exercice11 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$ 2) $\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5} \geq 0$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$: On cherche d'abord les solutions de l'équation : $3x^2+6x-9=0$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144$

Donc : $x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times 3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times 3}=\frac{-6+12}{6}=1$

Donc le tableau des Signes est :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite l'ensemble des solutions est: $S=\left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

2)Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 5 = 1+20 = 21$.

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{-2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \simeq 2,8$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

De même, pour le dénominateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-5)\times 2 = 1+40 = 41$

Donc : $x_1' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{41}}{4} \simeq -1,9$ et $x_2' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{41}}{4} \simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x^2+x-5$		$+$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left]\frac{-1-\sqrt{41}}{4};\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]\frac{-1+\sqrt{41}}{4};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Exercice12 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

2) Déterminer une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.

Je pose donc $X = x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.

Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Équivaut à : $\left(x^2\right)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

Je pose : $X = x^2$ l'équation devienne : $X^2 - 7X + 12 = 0$

Le discriminant de : $X^2 - 7X + 12 = 0$ est : $\Delta = (-7)^2 - 4\times 1\times 12 = 49-48 = 1 > 0$ et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{7-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{7+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{8}{2} = 4$

C'est-à-dire : $x^2 = 3$ ou $x^2 = 4$

C'est-à-dire : $x = \pm\sqrt{3}$ ou $x = \mp 2$

Donc l´équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ admet pour ensemble de solutions :

$S = \left\{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\right\}$

2) Résolution de l'inéquation : $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

On a une factorisation de $x^4 - 7x^2 + 12$ en un produit de monômes du premier degré :

$x^4 - 7x^2 + 12 = 1(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4-7x^2+12\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Exercice13 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|x-2|+|3x-2|\prec 8$ (I)

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $|x^2-2|+|3x^2-2|\prec 8$

Corrigé :1) $|x-2|+|3x-2|\prec 8$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$3x-2=0$ Signifie que : $x=\frac{2}{3}$

x	$-\infty$ $\quad$ $2/3$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$3x-2$	$-$ 0	$+$	$+$
$\|3x-2\|$	$-3x+2$	$3x-2$	$3x-2$
$\|x-2\|+\|3x-2\|$	$-4x+4$	$2x$	$4x-4$

Si : $x\leq\frac{2}{3}$ alors : $|x-2|+|3x-2|\prec 8$ devient : $-4x+4\prec 8$ ce qui Signifie que : $-4x\prec 4$

C'est-à-dire : $x\succ -1$

Donc : $S_1=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cap\left]-1;+\infty\right[=\left]-1;\frac{2}{3}\right]$

Si : $\frac{2}{3}\leq x\leq 2$ alors : l'équation devient : $2x\prec 8$ Ce qui Signifie que : $x\prec 4$

Donc : $S_2=\left]-\infty;4\right[\cap\left[\frac{2}{3};2\right]=\left[\frac{2}{3};2\right]$

Si : $x\geq 2$ alors : l'équation devient : $4x-4\prec 8$ ce qui Signifie que : $4x\prec 12$

C'est-à-dire : $x\prec 3$

$S_3=\left]-\infty;3\right[\cap\left[2;+\infty\right[=\left[2;3\right[$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left]-1;\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};2\right]\cup\left[2;3\right[=\left]-1;3\right[$

2) $|x^2-2|+|3x^2-2|\prec 8$ Signifie que : x^2 est une solution de l'inéquation : (I)

Signifie que : $x^2\in\left]-1;3\right[$

Signifie que : $-1\prec x^2\prec 3$

Signifie que : $0\leq x^2\prec 3$

Signifie que : $\sqrt{0}\leq\sqrt{x^2}\prec\sqrt{3}$

Signifie que : $|x| \prec \sqrt{3}$ Signifie que : $-\sqrt{3} \prec x \prec \sqrt{3}$

Signifie que : $x \in \left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$

Donc : $S = \left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$

Exercice14 : Soit le trinôme (E) : $P(x) = 2x^2 - 5x + 1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) $a = 2$: **et** **et** $b = -5$ **et** $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 25 - 8 = 17$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha + \beta = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2}$ et $\alpha \times \beta = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$$

On a : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Donc $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2} = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{4} \times 2 = \frac{21}{2}$

On sait que : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ par suite : $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{125}{8} - \frac{15}{4} = \frac{95}{8}$

Exercice15 : Soit : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x + 2$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 2$ montrer que : $P(x) = (x + 2)Q(x)$ avec $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) \geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

On a $P(-2)=2\times(-2)^3-(-2)^2-13\times(-2)-6=-16-4+26-6=0$ donc -2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+2$

2)

$$\begin{array}{rr|l} & 2x^3-x^2-13x-6 & x+2 \\ + & -2x^3-4x^2 & \overline{2x^2-5x-3} \\ \hline & -5x^2-13x-6 & \\ & 5x^2+10x & \\ \hline & -3x-6 & \\ & 3x+6 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec : $Q(x)=2x^2-5x-3$

3) $Q(x)=2x^2-5x-3$ et $Q(x)=0$

Δ = (-5) ^{2} – 4 x 2x (-3) =25+ 24 = 49

Donc : $x_1=\frac{5-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{49}}{2\times 2}=3$ par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$.

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2=3$

Donc le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\frac{1}{2};3\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2-5x-3$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2=3$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)=(2x+1)(x-3)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+2)(2x+1)(x-3)$

6) On a : $P(x)=(x+2)(2x+1)(x-3)$

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+2)(2x+1)(x-3)=0$ c'est-à-dire : Signifie : $x+2=0$ ou $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=3$ Par suite : $S=\mathbb{R}-\left\{-2,-\frac{1}{2},3\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+2)Q(x)<0$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]\frac{-1}{2};3\right[$

Exercice16 : (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x}=x-2$

Corrigé :

Remarque : La relation $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x\geq 0$

L'équation est donc définie sur : $D_E=[0,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres
Sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x}=x-2$ Signifie que : $\sqrt{x}^2=(x-2)^2$ et $x\in[2,+\infty[$

Signifie que : $x=x^2-4x+4$

Signifie que : $x^2-5x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-5x+4=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1\notin D_E$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4\in D_E$

$x^2-5x+4=0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice17 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Corrigé : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=\left[-2(m+1)\right]^2-4\times1\times4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1ére cas : $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ on a ; $\Delta=4(m-1)(m+3)>0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x1 et x2 telles que :

$x_1=\frac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et

$x_2=\frac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S=\left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m \in]-3;1[$ on a $\Delta = 4(m-1)(m+3) < 0$:
Donc : L'équation n'admet pas de solutions
Donc : $S = \varnothing$
3ére cas : $m = 1$: on a $\Delta = 4(1-1)(1+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2(m+1)}{2\times1} = m+1 = 2$

Donc : $S = \{2\}$

4ére cas : $m = -3$: on a $\Delta = 4(-3-1)(-3+3) = 0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2(m+1)}{2\times1} = -3+1 = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

Exercice18 : Soit sur un cercle trigonométrique un point A d'abscisse curviligne principale $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et ce point tourne sur ce cercle.
Quel est le nombre de tours effectués par ce point si $x = \frac{65\pi}{4}$ est son abscisse curviligne.

Solution : $\frac{65\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ avec : k le nombre de tours effectués par le point.

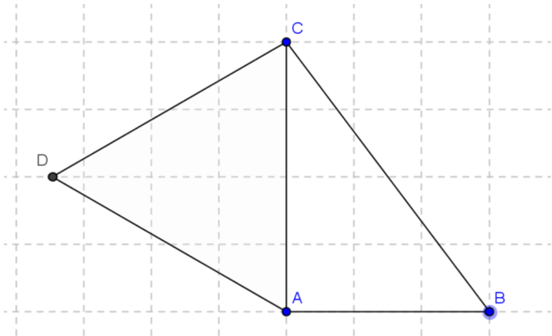
$\frac{65\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ Équivalent à : $2k\pi = \frac{65\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{64\pi}{4}$

Équivalent à : $2k = \frac{64}{4}$ Équivalent à : $k = \frac{64}{8} = 8$

Le nombre de tours effectués par le point est $k = 8$

Exercice19 : ABC est un triangle rectangle en A direct, tel que $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.
1) Faire une figure.
2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$;$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)$;$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

Solution :



$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Dans le triangle ABC on a : $ABC + BAC + ACB = \pi$ donc : $ACB = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Donc, vue l'orientation : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien