Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1
- ✓ Equations et inéquations du second degré
- ✓ Système d'équations du premier degré a deux inconnues
- ✓ Les polynômes
- ✓ TRIGONOMÉTRIE1(15%)

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $2(x-1)-3(x+1)>4(3x-2)$ 2) $-3x+9\le 0$ 3) $-2x+1>x-8$

4) $(x+2)\sqrt{5}+(2-x)\sqrt{7}\ge 0$ 5) $\frac{4x-1}{\sqrt{2}-2}<\frac{4x-3}{\sqrt{2}+2}$ 6) $16x^2-100\le 0$

7) $(-2x+6)(x+2)>0$ 8) $\frac{2x+8}{x+1}\ge 0$ 9) $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}\ge 0$

Corrigé :1) Comme pour les équations, on enlève les parenthèses puis on isole l'inconnue, ce qui donne :

$2(x-1)-3(x+1)>4(3x-2)$) Equivaut à : $2x-2-3x-3>12x-8$

Equivaut à : $2x-3x-12x>2+3-8$

Equivaut à : $-13x>-3$

On divise par -13, on change donc la relation d'ordre, ce qui Equivaut à $x<\frac{3}{13}$

On conclut par l'intervalle solution Donc : $S=\left]-\infty;\frac{3}{13}\right[$

2) $-3x+9\le 0$

$-3x+9=0$ Équivalent à : $x=3$ avec $a=-3<0$ coefficient de x négatif

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-3x+9$	$+$	0	$-$

Donc : $S=[3;+\infty[$

3) $-2x+1>x-8$ Équivalent à : $-3x>-9$ Équivalent à : $x<\frac{-9}{-3}$ Équivalent à : $x<3$

L'ensemble de solution est alors : $S=]-\infty;3[$

4) $(x+2)\sqrt{5}+(2-x)\sqrt{7}\ge 0$ Équivalent à : $x\sqrt{5}-x\sqrt{7}+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}\ge 0$

Équivalent à : $x(\sqrt{5}-\sqrt{7})\ge -2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ Équivalent à : $x\le -2\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right)$ car $\sqrt{5}-\sqrt{7}<0$

Équivalent à : $x\le -2\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{7}^2}$ Équivalent à : $x\le -2\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{5-7}$

Équivalent à : $x\le(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$ Équivalent à : $x\le(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2$

Équivalent à : $x\le 12+2\sqrt{35}$

L'ensemble de solution est alors : $S=\left]-\infty;12+2\sqrt{35}\right]$

5) $\frac{4x-1}{\sqrt{2}-2} < \frac{4x-3}{\sqrt{2}+2}$ Équivalent à : $\frac{4x-1}{\sqrt{2}-2} - \frac{4x-3}{\sqrt{2}+2} < 0$

Équivalent à : $\frac{(4x-1)(\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}-2)(4x-3)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} < 0$

Équivalent à : $\frac{4\sqrt{2}x+8x-\sqrt{2}-2-4\sqrt{2}x+3\sqrt{2}+8x-6}{2-4} < 0$

Équivalent à : $\frac{16x+2\sqrt{2}-8}{-6} \prec 0$ Équivalent à : $16x+2\sqrt{2}-8 > 0$

Équivalent à : $16x > 8-2\sqrt{2}$ c'est-à-dire : $x > \frac{8-2\sqrt{2}}{16}$ c'est-à-dire : $x > \frac{4-\sqrt{2}}{8}$

Par suite : $S = \left]\frac{4-\sqrt{2}}{8};+\infty\right[$

6) $16x^2-100 \leq 0$

$16x^2-100 \leq 0$ Équivalent à : $(4x)^2-10^2 \leq 0$ donc : $(4x-10)(4x+10) \leq 0$

$(4x-10)(4x+10)=0$ Équivalent à : $4x-10=0$ ou $4x+10=0$

Équivalent à : $x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		$5/2$		$+\infty$
$4x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x+10$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(4x-10)(4x+10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right]$

7) $(-2x+6)(x+2) > 0$

$(-2x+6)(x+2)=0$ Équivalent à : $-2x+6=0$ ou $x+2=0$ Équivalent à : $x=3$ ou $x=-2$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(-2x+6)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S =]-2;3[$

8) $\frac{2x+8}{x+1} \geq 0$ (Signe d'un quotient méthode)

- Donner l'ensemble de définition.
- Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+).
Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif

Cette inéquation existe si $x+1 \neq 0$

$x+1=0$ Équivalent à : $x=-1$

La valeur interdite de cette inéquation est -1. L'inéquation est donc définie sur : $D_I = \mathbb{R}-\{-1\}$

$2x+8=0$ Équivalent à : $x=-4$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+8}{x+1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Attention à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite

Donc : $S = \left]-\infty;-4\right] \cup \left]-1;+\infty\right[$

9) $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1} \geq 0$ Signifie que : $\frac{(3x+1)(2-x)}{(2x+1)(2x-1)} \geq 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $4x^2-1 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq \frac{1}{2}$ ou $x \neq -\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation : est : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

b) Résolvons l'inéquation : $2-x=0$ Signifie que : $x=2$

$3x+1=0$ Signifie que : $x = \frac{-1}{3}$ D'où le tableau des Signes est:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Par suite : $S = \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$

Exercice02 : un camion pesant à vide deux tonnes doit passer sur un pont limité à 6 tonnes.
Combien de caisses de 350 kg peut-il transporter ?

Corrigé : Choix de l'inconnue

Soit x le nombre de caisses, on a :

Chargement du camion : $350x$

Poids total du camion : $350x+2000$ (le camion à vide pèse 2 t).

Mise en inéquation

On sait que le poids du camion ne doit pas dépasser 6 tonnes.

On peut traduire cette donnée par l'inéquation :

$350x+2000 \leq 6000$

Résolution de l'inéquation

$350x \leq 6000-2000$ Signifie que : $350x \leq 4000$

Signifie que : $x \leq \frac{4000}{350}$ Signifie que : $x \leq 11{,}42...$

Réponse à la question

Le nombre de caisses doit être inférieur ou égal à 11.

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$(m+1)x+2mx-(m+4x)+2=0$

Corrigé : On va écrire cette équation sous la forme : $ax+b=0$

$(m+1)x+2mx-(m-x)+2=0$ Équivalent à : $mx+x+2mx-m-4x+2=0$

Équivalent à : $(m+1+2m-4)x-m+2=0$

Équivalent à : $(3m-3)x-m+2=0$

1ére cas : $3m-3\neq 0$ c'est à dire : $m\neq 1$

$(3m-3)x-m+2=0$ Équivalent à : $(3m-3)x=m-2$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\dfrac{m-2}{3m-3}$ Par suite : $S=\left\{\dfrac{m-2}{3m-3}\right\}$

2ére cas : $3m-3=0$ c'est à dire : $m=1$

L'équation devient : $(3\times 1-3)x-1+2=0$

Équivalent à : $0x+1=0$ ce qui est impossible

Par suite : $S=\varnothing$

Exercice04 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $4x^2-8x+3=0$ 2) $x^2-4x+2=0$ 3) $x^2+5x+7=0$

Solution : 1) $4x^2-8x+3=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times 3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 4}$ et $x_2=\dfrac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 4}$

$x_1=\dfrac{8+4}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{8-4}{8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ donc : $S=\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $x^2-4x+2=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 2\times(1)=16-8=8>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times 1}$ et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$ **et** $x_2=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ Donc **:** $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

3) $x^2+5x+7=0$ **:** $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times 1\times 7=25-28=-3<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Exercice05 : Soit le trinôme (E) : $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$

Solution : 1 $a=2$ et $b=-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ et $c=\sqrt{15}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\times 2\times\sqrt{15}=\left(2\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{15}=20+4\sqrt{15}+3-8\sqrt{15}$

$\Delta=23-4\sqrt{15}\succ 0$ Car : $23\succ 4\sqrt{15}$ $23^2=529$ et $\left(4\sqrt{15}\right)^2=16\times 15=240$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{23}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc : $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{23}{4}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x-3\sqrt{x}-4=0$

Corrigé : Méthode : Je pose donc $X=\sqrt{x}$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x\geq 0$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=[0;+\infty[$

● Résolution de l'inéquation : $x-3\sqrt{x}-4=0$ Équivaut à : $\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-4=0$

Je pose : $X=\sqrt{x}$ l'équation devienne : $X^2-3X-4=0$

Le discriminant de : $X^2-3X-4=0$ est : $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$ et $X_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $\sqrt{x}=-1$ impossible ou $\sqrt{x}=4$
C'est-à-dire : $x=16\in D_I$

Donc l´équation $x-3\sqrt{x}-4=0$ admet pour ensemble de solutions : $S=\{16\}$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$ 2) $-2x(x-2)\left(x^2-8x+16\right)>0$

Solution : Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

• Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$, et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x)\leqslant 0$ ou $f(x)>0$.

• Résolvez $f(x)=0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

• Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

• Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

1) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq 0$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$
Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{9-\sqrt{9}}{2a} = \frac{9-3}{2\times(-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{9}}{2a} = \frac{9+3}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = 8^2-4\times(-1)\times(-17) = 64-68 = -4 < 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]-\infty;-1[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = (-8)^2-4\times1\times16 = 64-64 = 0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq 0$

La racine double est : $x_1 = \frac{8}{2\times1} = 4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$ est : $S =]0;2[$

Exercice08 : Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{5}(-1)^2-(-1)+\sqrt{5}$

$P(-1)=-1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}=0$

Donc : **-1** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)=x^3-\left(\sqrt{5}+1\right)x^2+\sqrt{5}x+x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$

$=x^3-\sqrt{5}x^2-x^2+\sqrt{5}x+x^2-\sqrt{5}x-x+\sqrt{5}$

$=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}=P(x)$

3)a) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ $\quad a=1$ et $b=-\left(\sqrt{5}+1\right)$ et $c=\sqrt{5}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2-4\times\sqrt{5}\times1=\left(\sqrt{5}+1\right)^2-4\sqrt{5}$

$\Delta=\sqrt{5}^2+2\times1\times\sqrt{5}+1^2-4\sqrt{5}=\sqrt{5}^2-2\sqrt{3}+1^2=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

3)b) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Puisque : $\Delta>0$ donc il y'a deux racines :

$x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{5}+1+\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{5}+1-\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times1}$

Or on a : $\sqrt{5}\succ1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2\succ(1)^2$ Donc $\sqrt{5}-1\succ0$ par suite: $\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$

Donc : $x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2\times1}=\sqrt{5}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2\times1}=1$ par suite : $S=\left\{1,\sqrt{5}\right\}$

4) $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$ Est équivalente à: $\sqrt{x}^2-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2-\left(\sqrt{5}+1\right)X+\sqrt{5}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=\sqrt{5}$ et $X_2=1$ qui Signifie que : $\sqrt{x_1}=\sqrt{5}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Qui Signifie que: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=1^2$

Qui Signifie que: $x_1=5$ et $x_2=1$ par suite: $S=\{1,5\}$

5) On a: $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

$P(x)=0$ Signifie $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}=0$

Signifie $x_0=-1$ ou $x_1=\sqrt{5}$ ou $x_2=1$ Par suite: $S=\left\{-1,1,\sqrt{5}\right\}$

6) $P(x)\geq 0$ est équivalente à: $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)\geq 0$

x	$-\infty$	-1		1		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S=[-1;1]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right[$

Exercice09 : On considère l´équation : (E) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$

1) Montrer que les nombre -2 et 2 sont des solutions de (E)

2) Montrer que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

Corrigé :1) On a : $2^4+2\times 2^3-5\times 2^2-8\times 2+4=16+16-20-16+4=0$

Donc : le nombre 2 est solution de (E)

Donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

On a aussi : $(-2)^4+2\times(-2)^3-5\times(-2)^2-8\times(-2)+4=16-16-20+16+4=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) 2 est solution de (E) donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

-2 est solution de (E) donc : $x+2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par suite : $(x+2)(x-2)=x^2-4$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par la division euclidienne de : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$ par : x^2-4

On trouve que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

Remarque : On peut simplement développer $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$ et essayer de trouver :
$x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$ Equivaut à : $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)=0$ Equivaut à : $x^2-4=0$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x^2=4$ ou $x^2+2x-1=0$ Equivaut à : $x=\sqrt{4}$ ou $x=-\sqrt{4}$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x=2$ ou $x=-2$ ou $x^2+2x-1=0$

Le discriminant de : $x^2+2x-1=0$ est : $\Delta=2^2-4\times 1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2\times 1}=-1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2\times 1}=-1+\sqrt{2}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-1-\sqrt{2};-2;-1+\sqrt{2};2\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

On a : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x-1\right)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-2		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x^2+2x-1		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
x^2-4		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$(x^2+2x-1)(x^2-4)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right[\cup\left]-2,-1+\sqrt{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

Exercice10 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) $x_1=-6\pi$ b) $x_2=\dfrac{31\pi}{3}$ c) $x_3=\dfrac{-23\pi}{6}$ d) $x_4=\dfrac{127\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$; $C(x_3)$; $D(x_4)$

Solution :1) a) $x_1=-6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_1=2k\pi$ c a d $\alpha=-6\pi+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<-6\pi+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+6\pi<2k\pi\le\pi+6\pi$

Équivalent à : $5\pi<2k\pi\le7\pi$

Équivalent à : $5<2k\le7$

Équivalent à : $\dfrac{5}{2}<k\le\dfrac{7}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=3$ et donc $\alpha=-6\pi+2\times3\pi=-6\pi+6\pi=0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$ est $\alpha=0$

b) $x_2=\dfrac{31\pi}{3}$

Methode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_2=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\dfrac{31\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<\dfrac{31\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\dfrac{31\pi}{3}<2k\pi\le\pi-\dfrac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\dfrac{34\pi}{3}<2k\pi\le-\dfrac{28\pi}{3}$

Équivalent à : $-\dfrac{34}{3}<2k\le-\dfrac{28}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\dfrac{17}{3}<k\le-\dfrac{14}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-5{,}6<k\le-4{,}6$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-5$ et donc : $\alpha=\dfrac{31\pi}{3}+2k\pi=\dfrac{31\pi}{3}+2(-5)\pi=\dfrac{31\pi}{3}-10\pi=\dfrac{31\pi-30\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2=\dfrac{31\pi}{3}$ est : $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

Methode2 : $x_2=\dfrac{31\pi}{3}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq 10{,}3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10\times 3=30$

On a $\dfrac{31\pi}{3}=\dfrac{30\pi+\pi}{3}=\dfrac{30\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+10\pi=\dfrac{\pi}{3}+5\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2=\dfrac{31\pi}{3}$ est : $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

c) $x_3=\dfrac{-23\pi}{6}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 23 par 6 on trouve $\simeq 3{,}8$ on prend le nombre entier proche ex : 4 et $6\times 4=24$

On a $\dfrac{-23\pi}{6}=\dfrac{-24\pi+\pi}{6}=\dfrac{-24\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}-4\pi=\dfrac{\pi}{6}+(-2)\times 2\pi$ et $\dfrac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_3=\dfrac{-23\pi}{6}$ est : $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

d) $x_4=\dfrac{127\pi}{4}\notin\left]-\pi\,;\pi\right]$

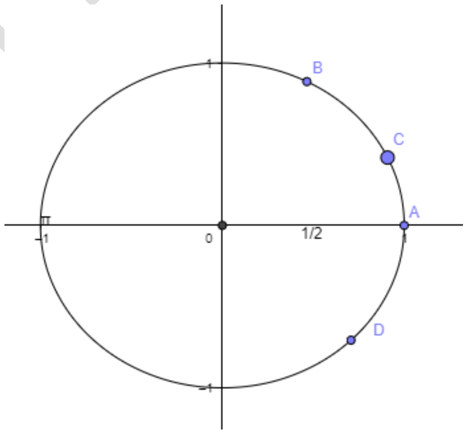
On divise 127 par 4 on trouve $\simeq 31{,}7$ on prend le nombre entier proche ex : 32 et $32\times 4=128$

On a $\dfrac{127\pi}{4}=\dfrac{128\pi-\pi}{4}=\dfrac{128\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+32\pi=-\dfrac{\pi}{4}+16\times 2\pi$

et $-\dfrac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_4=\dfrac{127\pi}{4}$

est : $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$



Exercice11 : Sachant que $\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{10}}$ donc : $\cos^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\pi}{10}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

C'est-à-dire : $\cos^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{\dfrac{5+5-2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{5}{10-2\sqrt{5}}$

$\cos^2\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}{100-20}=\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\geq 0$ alors : $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) Calcul de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}$ c'est-à-dire : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3) On a : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)$

$\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$ Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

On a : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$ par suite : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien