Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{3}(x+2)=1-x\sqrt{2}$ 2) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$

4) $(x+2)\frac{(2x-1)}{3}(x-2)^2=0$ 5) $x^3+27=3x(x+3)$

Corrigé : 1) $\sqrt{3}(x+2)=1-x\sqrt{2}$ Équivaut à : $\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=1-\sqrt{2}x$

Équivaut à : $\sqrt{3}x+\sqrt{2}x=1-2\sqrt{3}$

Équivaut à : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x=1-2\sqrt{3}$

Équivaut à :

$$x=\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

Et par suite l'ensemble des solutions : $S=\left\{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\}$

2) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+2\neq 0$

Cette l'équation est définie si et seulement si $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-5}{x-2}=0$ On peut réduire au même dénominateur les deux fractions.

Le dénominateur commun est : $(x+2)(x-2)$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{(x-1)(x-2)-(x-5)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$

Équivalent à $\frac{x^2-2x-x+2-x^2-2x+5x+10}{(x+2)(x-2)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{12}{(x+2)(x-2)}=0$

Donc : $12=0$ impossible

D'où : $S=\varnothing$

3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

$D_E=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1^2\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/(x-1)(x+1)\neq 0\right\}$

$D_E == \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \ \ et \ \ x+1 \neq 0 \ \} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \ \ et \ \ x \neq -1 \ \}$

Donc : $D_E = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1} = 0$

Soit ; $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1} = 0$ Signifie : $(x-1)(x+2) = 0$

Signifie : $x-1=0$ ou $x+2=0$

Signifie : $x=1$ ou $x=-2$ et comme : $1 \notin \mathbb{R} - \{-1,1\}$

Alors : $S = \{-2\}$

4) $(x+2)\frac{(2x-1)}{3}(x-2)^2 = 0$ Signifie : $(x+2)(2x-1)(x-2)^2 = 0$

Signifie : $x+2=0$ ou $2x-1=0$ ou $(x-2)^2 = 0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x-2=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=2$

D'où : $S = \left\{-2;\frac{1}{2};2\right\}$

5) $x^3+27 = 3x(x+3)$ Signifie : $x^3+3^3 = 3x(x+3)$ on a ; $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Signifie : $(x+3)(x^2-3x+3^2)-3x(x+3) = 0$

Signifie : $(x+3)(x^2-3x+9-3x) = 0$

Signifie : $(x+3)(x^2-6x+9) = 0$

Signifie : $(x+3)(x-3)^2 = 0$

Signifie : $x+3=0$ ou $(x-3)^2 = 0$

Signifie : $x+3=0$ ou $x-3=0$

Signifie : $x=-3$ ou $x=3$

D'où : $S = \{-3;3\}$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2} = 0$ 2) $\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25} = 0$

Corrigé :1) $\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2} = 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x+2 \neq 0$

Donc : $D_E = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2} = 0$ Signifie : $(2-6x)(3x+12) = 0$

Signifie : $2-6x=0$ ou $3x+12=0$

Signifie : $x=\frac{1}{3} \in D_E$ ou $x=-4 \in D_E$ et par suite : $S = \left\{-4;\frac{1}{3}\right\}$

2) $\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25}=0$

On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $16x^2-25\neq 0$

$16x^2-25=0$ Signifie : $x^2=\frac{25}{16}$ signifie : $x=\frac{5}{4}$ ou $x=-\frac{5}{4}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25}=0$ Signifie : $(x-3)(2x-8)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-8=0$

Signifie : $x=3\in D_E$ ou $x=4\in D_E$ et par suite : $S=\{3;4\}$

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-2|=4$ 2) $|x+5|=-3$

3) $|x+3|\leq 2$ 4) $|x-1|>5$ 5) $|3x-1|=|5x+2|$ 6) $|x+1|=4-|3x+2|$

7) $|x^2-2x+3|=2$

Corrigé : 1) On a les équivalences suivantes :

$|x-2|=4$ Signifie que : $x-2=4$ ou $x-2=-4$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-2$

Donc : $S=\{-2;6\}$

2) $|x+5|=-3$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative :Donc : $S=\varnothing$

3) **Règle :** $|x-a|\leq r$ est équivalente à **:** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|x+3|\leq 2$ Signifie que : $-2\leq x+3\leq 2$

Signifie que : $-2-3\leq x+3-3\leq 2-3$

Signifie que : $-5\leq x\leq -1$

Donc : $S=[-5;-1]$

4) $|x-1|>5$

Règle : $|x-a|>r$ est équivalente à : $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-1|>5$ Signifie que : $x-1>5$ ou $x-1<-5$

Signifie que : $x>6$ ou $x<-4$ Donc : $S=]-\infty;-4[\cup]6;+\infty[$

5) $|3x-1|=|5x+2|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x-1|=|5x+2|$ Signifie que : $3x-1=5x+2$ ou $3x-1=-(5x+2)$

Signifie que : $3x-5x=2+1$ ou $3x-1=-5x-2$

Signifie que : $-2x=3$ ou $8x=-1$

Signifie que : $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{8}$ Donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{8}\right\}$

6) $|x+1|=4-|3x+2|$

On a les équivalences suivantes :

$x+1\geq 0$ Signifie que : $x\geq -1$

$3x+2\geq 0$ Signifie que : $x\geq -\frac{2}{3}$

On distingue alors trois cas :

• Sur : $]-\infty;-1]$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $-(x+1)=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $-x-1=4+3x+2$

Signifie que : $-4x=7$

Signifie que : $x=-\frac{7}{4}\in]-\infty;-1]$

• Sur : $\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $x+1=4+3x+2$ Signifie que : $-2x=5$

Signifie que : $x=-\frac{5}{2}\notin\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$

• Sur : $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(3x+2)$

Signifie que : $x+1=4-3x-2$ Signifie que : $4x=1$

Signifie que : $x=\frac{1}{4}\in\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$

Au final : $S=\left\{-\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right\}$

7) (E) ; $|x^2-2x+3|=2$

$|x^2-2x+3|=2$ Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

• Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta = -16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Exercice04 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) (E) : $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{3}$ 2) (I) : $\frac{x}{2x+1}\leq\frac{1}{3}$

Corrigé :1) $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{3}$

● On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $2x+1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq-\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

● On résoud l'équation : $\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{3}$; soit ; $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{3}$ si et seulement si : $3x = 2x+1$ Si et seulement si : $x = 1 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S = \{1\}$

2) $\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $2x+1 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq -\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

● On résoud l'inéquation : $\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$; soit ; $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$ si et seulement si : $\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{3} \leq 0$

Si et seulement si : $\frac{3x-2x-1}{3(2x+1)} \leq 0$ Si et seulement si : $\frac{x-1}{3(2x+1)} \leq 0$

Le signe de : $\frac{x-1}{3(2x+1)}$ dépend du signe des expression : $2x+1$ et $x-1$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $2x+1=0$ Signifie que : $x = -\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3(2x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{3(2x+1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\frac{1}{2}, 1\right]$

Exercice05 : Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes.

1) $x^3 + 2x^2 \leq -x$ 2) $\frac{x+3}{3x-5} < \frac{3x-5}{x+3}$

Corrigé : 1) $x^3 + 2x^2 \leq -x$ Signifie que : $x^3 + 2x^2 + x \leq 0$ Signifie que : $x(x^2+2x+1) \leq 0$

Signifie que : $x(x+1)^2 \leq 0$

Valeurs frontières : $(x+1)^2 = 0$ Signifie que : $x+1=0$

Signifie que : $x=-1$ et $x=0$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)^2$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S =]-\infty, -1] \cup [-1, 0] =]-\infty, 0]$

2) $\frac{x+3}{3x-5}<\frac{3x-5}{x+3}$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette équation est définie si et seulement si $3x-5\neq 0$ et $x+3\neq 0$ qui signifie que : $x\neq\frac{5}{3}$ et $x\neq -3$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-3;\frac{5}{3}\right\}$

● On résoud l'inéquation : $\frac{x+3}{3x-5}<\frac{3x-5}{x+3}$

$\frac{x+3}{3x-5}<\frac{3x-5}{x+3}$ si et seulement si : $\frac{x+3}{3x-5}-\frac{3x-5}{x+3}<0$

Si et seulement si : $\frac{(x+3)^2-(3x-5)^2}{(x+3)(3x-5)}<0$ Si et seulement si : $\frac{[(x+3)-(3x-5)][(x+3)+(3x-5)]}{(x+3)(3x-5)}<0$

Si et seulement si : $\frac{(x+3-3x+5)(x+3+3x-5)}{(x+3)(3x-5)}<0$ Si et seulement si : $\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(x+3)(3x-5)}<0$

Le signe de : $\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(x+3)(3x-5)}$ dépend du signe des expressions :

$-2x+8$ et $4x-2$ et $x+3$ et $3x-5$

Valeurs frontières : $-2x+8=0$ Signifie que : $x=4$ et $4x-2=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

$x+3=0$ Signifie que : $x=-3$ et $3x-5=0$ Signifie que : $x=\frac{5}{3}$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		4		$+\infty$
$-2x+8$	+		+		+		+	0	−	
$4x-2$	−		−	0	+		+		+	
$3x-5$	−		−		−	0	+		+	
$x+3$	−	0	+		+		+		+	
$\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)}$	−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

Donc : $S=]-\infty,-3[\cup\left]\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right[\cup]4,+\infty[$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2-5x+2=0$ 2) $x^2-2x+6=0$ 3) $x^2-6x+9=0$ 4) $x(x-3)=2(x-1)$

Corrigé :1) $x^2-5x+2=0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2-5x+2=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times2=25-8=17>0$

Donc : l´équation admet deux solutions réelles distincts : $x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2 - 5x + 2 = 0$ est donc : $S = \left\{ \frac{5-\sqrt{17}}{2} ; \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right\}$

3) $x^2 - 2x + 6 = 0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2 - 2x + 6 = 0$ est : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 6 = 4 - 24 = -20 < 0$

Donc : l´équation n'admet pas de solution réelle.

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2 - 2x + 6 = 0$ est donc : $S = \varnothing$

3) $x^2 - 6x + 9 = 0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2 - 6x + 9 = 0$ est : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 1\times 9 = 36 - 36 = 0$

Donc : l´équation admet une unique solution réelle : $x_1 = \frac{-b}{2\times a} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2 - 6x + 9 = 0$ est donc : $S = \{3\}$

4) $x(x-3) = 2(x-1)$

Je développe, je passe tout dans le premier membre et l´équation s´écrit :

$x(x-3) = 2(x-1)$ Signifie que : $x^2 - 3x = 2x - 2$ Signifie que : $x^2 - 5x + 2 = 0$

Le discriminant de : $x^2 - 5x + 2 = 0$ est : $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 2 = 25 - 8 = 17 > 0$

Donc : l´équation admet deux solutions réelles distincts :

$x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2 - 5x + 2 = 0$ est donc : $S = \left\{ \frac{5-\sqrt{17}}{2} ; \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right\}$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : (I) : $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8} \leq 0$

Solution : a) On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation

$D_I = \{ x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 10x - 8 \neq 0 \}$

Calculons le discriminant de $3x^2 + 10x - 8$: $a = 3$; $b = 10$; $c = -8$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 10^2 - 4\times 3\times(-8) = 192 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme : $3x^2 + 10x - 8$ possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-10-\sqrt{196}}{2a} = \frac{-10-14}{2\times 3} = \frac{-24}{6} = -4$ et $x_2 = \frac{-10+\sqrt{196}}{2a} = \frac{-10+14}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Donc $D_I = \mathbb{R} / \left\{ -4 ; \frac{2}{3} \right\}$

b) Le signe de : $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}$ dépend du signe des expressions : $3x^2 + 10x - 8$ et $x^2 - 6x + 9$

On a : $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 = (x-3)^2 \geq 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ Equivaut à : $(x-3)^2 = 0$ Equivaut à : $x - 3 = 0$

Donc : on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$x2-6x+9$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$3x2+10x-8$	$+$	0 $-$	0 $+$		$+$
$\frac{x2-6x+9}{3x2+10x-8}$	$+$	$\|$ $-$	$\|$ $+$	0	$+$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S = \left]-4;\frac{2}{3}\right[\cup \{3\}$

Exercice08 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $x^4 - 2x^2 - 1 = 2$
 (On pourra penser à utiliser le changement de variable : X = x^2).

Corrigé :1) $x^4 - 2x^2 - 1 = 2$ Equivaut à : $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

L'équation : $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ Equivaut à : $(x^2)^2 - 2x^2 - 3 = 0$

On pose : $X = x^2$ L'équation : $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ devienne : $X^2 - 2X - 3 = 0$

Or : $\Delta = 16 > 0$ donc P admet deux solutions distinctes $X_1 = -3$ et $X_2 = 1$

Or $X = x^2 \geq 0$ donc on ne conserve que la solution positive. $\cancel{X_1 = -3}$

Donc : $X = 1$ Equivaut à : $x^2 = 1$ Equivaut à : $x = \sqrt{1}$ ou $x = -\sqrt{1}$ Equivaut à : $x = 1$ ou $x = -1$
L'ensemble solution de (E) est donc S = {−1 ; 1}.

Remarque : Les équations de degré 4 ne faisant intervenir que des puissances paires de x sont appelées des
Équations bicarrées et se résolvent toujours en faisant le changement de variables X = x^2 ce qui permet de se ramener à une équation de degré 2.

Exercice09 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $\sqrt{x^2+1} = 1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x - y = -8 \\ 4x + 3y = 31 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - y^2 + 8 = 0 \\ 8\sqrt{x^2+1} + 6y^2 = 62 \end{cases}$

Solution : 1) $\sqrt{x^2+1} = 1$ équivalent : $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = 1^2$ équivalent : $x^2+1 = 1$ équivalent : $x^2 = 0$

Équivalent : $x = 0$

Donc : $S = \{0\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x - y = -8 \\ 4x + 3y = 31 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -8 \\ 4x + 3y = 31 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y = x + 8 \\ 4x + 3(x+8) = 31 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} y = x + 8 \\ 4x + 3x + 24 = 31 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} y = x + 8 \\ 7x = 7 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y = 1 + 8 \\ x = 1 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} y = 9 \\ x = 1 \end{cases}$

La solution du système est donc : $S = \{(1,9)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2+8=0\\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2+8=0\\ 8\sqrt{x^2+1}+6y^2=62\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2=-8\\ 2\left(4\sqrt{x^2+1}+3y^2\right)=62\end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-y^2=-8\\ 4\sqrt{x^2+1}+3y^2=31\end{cases}$

On pose : $\begin{cases}X=\sqrt{x^2+1}\\ Y=y^2\end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases}X-Y=-8\\ 4X+3Y=31\end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$

Donc : $\sqrt{x^2+1}=1$ et $y^2=9$

Donc : ($x=0$) et ($y=-3$ ou $y=3$) Par suite : $S=\{(0,3);(0,-3)\}$

Exercice10 : On considère les polynômes : $P(x)=-132x^3+347x^2-172x+12$ et $Q(x)=-132x^2+83x-6$

1) a) Démontrer, sans effectuer la division euclidienne, que $P(x)$ est divisible par $x-2$

b) Démontrer en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x-2)Q(x)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

b) En déduire une factorisation de $Q(x)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3)a) Calculer : $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

c) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}\geq 0$

Solution :1) $P(x)=-132x^3+347x^2-172x+12$ et $Q(x)=-132x^2+83x-6$

1) a) On a : $P(2)=-132\times 2^3+347\times 2^2-172\times 2+12=-1056+1388-344+12=1400-1400=0$

Donc : 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x-2$

b) Démontrons en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x-2)Q(x)$

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ on trouve :

$$\begin{array}{rrrr|l}
-132x^3 & +347x^2 & -172x & +12 & x-2\\ \hline
-(-132x^3 & +264x^2) & & & -132x^2+83x-6\\ \cline{1-2}
+0x^3 & +83x^2 & -172x & & \\
 & -(+83x^2 & -166x) & & \\ \cline{2-3}
 & +0x^2 & -6x & +12 & \\
 & & -(-6x & +12) & \\ \cline{3-4}
 & & & +0 &
\end{array}$$

On a donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-132x^2+83x-6$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $Q(x)=0$: $-132x^2+83x-6=0$

Le discriminant de : $-132x^2+83x-6=0$ est : $\Delta=(83)^2-4\times(-132)\times(-6)=3721=61^2>0$ et ses solutions sont : $x_1=\frac{-83+61}{2\times(-132)}=\frac{-22}{-264}=\frac{1}{12}$ et $x_2=\frac{-83-61}{2\times(-132)}=\frac{-144}{-264}=\frac{6}{11}$

Par conséquent : $S=\left\{\frac{1}{12};\frac{6}{11}\right\}$

b) Déduction d'une factorisation de $Q(x)$:

$Q(x)=-132x^2+83x-6$ Admet deux racines : $x_1=\frac{1}{12}$ et $x_2=\frac{6}{11}$

Donc : $Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-132\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{6}{11}\right)=-12\times11\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{6}{11}\right)=-(12x-1)(11x-6)$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x-2)Q(x)=0$ Signifie que : $x-2=0$ ou $Q(x)=0$

Signifie que : $x_0=2$ ou $x_1=\frac{1}{12}$ et $x_2=\frac{6}{11}$

Par conséquent : $S=\left\{\frac{1}{12};\frac{6}{11};2\right\}$

3)a) Calculons : $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Le discriminant de : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ est :

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4\times\left(-2\sqrt{6}\right)\times1=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

Puisque : $\Delta\succ0$ donc il y'a deux solutions : $x_1=\frac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

ET $x_2=\frac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ0$ par suite : $\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=-2\sqrt{3}$

Par suite: $S=\left\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\right\}$

c) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$ Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ qui Signifie que: $x_2=2$

Par suite: $S=\{2\}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}\geq 0$

$Q(x)=-132x^2+83x-6$ admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{12}$ et $x_2=\dfrac{6}{11}$

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ Admet deux racines : $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{6}{11}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-132x^2+83x-6$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Par suite : $S=\left[-2\sqrt{3},\dfrac{1}{12}\right[\cup\left]\dfrac{6}{11},\sqrt{2}\right]$

Exercice11 : Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C d'abscisses curvilignes respectifs : $\dfrac{17\pi}{4}$; $\dfrac{23\pi}{3}$; $-\dfrac{23\pi}{6}$

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points
2) En déduire les mesures des angles orientés :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$;$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

$A\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)$: $\dfrac{17\pi}{4}=\dfrac{16\pi+\pi}{4}=\dfrac{16\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=4\pi+\dfrac{\pi}{4}$

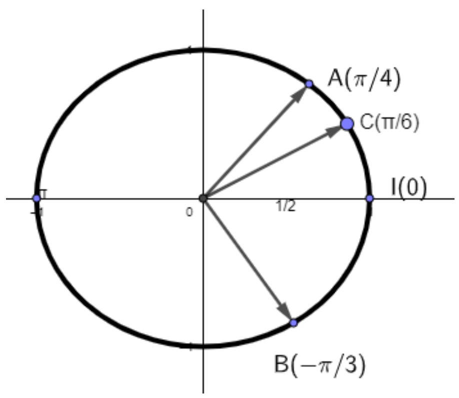
On a : $\dfrac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\dfrac{23\pi}{3}\right)$: $\dfrac{23\pi}{3}=\dfrac{24\pi-\pi}{3}=\dfrac{24\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=8\pi-\dfrac{\pi}{3}$

On a : $-\dfrac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$: $-\dfrac{23\pi}{6}=\dfrac{-24\pi+\pi}{6}=-\dfrac{24\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=-4\pi+\dfrac{\pi}{6}$

On a : $\dfrac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point C.



2)Remarque : $\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)\equiv x_M\,[2\pi]$ avec $M(x_M)$ et

$\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv x_B-x_A\,[2\pi]$ avec $A(x_A)$ et $B(x_B)$

$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice12 :1) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire **:** $\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ c'est à dire **:** $\cos^2 x=1-\frac{1}{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{2}{3}$ par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

Par suite : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien