Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(3x+1)(5x-2)-9x^2+1=0$ 2) $x^3+1+2(x^2-1)-3x-3=0$ 3) $\frac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\frac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$

Corrigé : 1) $(3x+1)(5x-2)-9x^2+1=0$ équivaut à : $(3x+1)(5x-2)-(9x^2-1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)(5x-2)-(3x-1)(3x+1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)\left[(5x-2)-(3x-1)\right]=0$

Équivaut à : $(3x+1)(5x-2-3x+1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)(2x-1)=0$

Équivaut à : $3x+1=0$ ou $2x-1=0$

Équivaut à : $x=-\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{1}{2}$ d''où : $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

2) $x^3+1+2(x^2-1)+x+1=0$ équivaut à : $x^3+1^3+2(x^2-1^2)+(x+1)=0$

Équivaut à : $(x+1)(x^2-x+1)+2(x+1)(x-1)+1(x+1)=0$ car : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Équivaut à : $(x+1)\left[(x^2-x+1)+2(x-1)+1\right]=0$

Équivaut à : $(x+1)(x^2-x+1+2x-2+1)=0$ c'est-à-dire : $(x+1)(x^2+x)=0$

Équivaut à : $x(x+1)(x+1)=0$

Équivaut à : $x(x+1)^2=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x+1=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x=-1$ d''où : $S=\{-1;0\}$

3) $\frac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\frac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$

Cette équation n'existe pas si $x-2=0$ et si $\sqrt{3}x-3=0$

$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

$\sqrt{3}x-3=0$ Équivaut à : $x=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Les valeurs interdites de cette équation sont 2 et $\sqrt{3}$. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}\setminus\{2;\sqrt{3}\}$.

$\frac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\frac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$ Équivaut à : $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x-3)=(3x-3)(x-2)$

Équivaut à : $3x^2-3\sqrt{3}x-\sqrt{3}x+3=3x^2-6x-3x+6$

Équivaut à : $-4\sqrt{3}x+9x=3$ Équivaut à : $(-4\sqrt{3}+9)x=3$

Équivaut à : $x=\dfrac{3}{9-4\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(9+4\sqrt{3}\right)}{\left(9-4\sqrt{3}\right)\left(9+4\sqrt{3}\right)}=\dfrac{3\left(9+4\sqrt{3}\right)}{81-48}=\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11}\in D_E$

D'où : $S=\left\{\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11}\right\}$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : a) $\dfrac{3x+5}{x-1}=0$ b) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$

Corrigé : a) L'équation n'est pas définie pour $x = 1$.

Pour $x\neq 1$, l'équation $\dfrac{3x+5}{x-1}=0$ équivaut à : $3x+5=0$

D'où : $x=-\dfrac{5}{3}$ c a d : $S=\{-5/3\}$

b) L'équation n'est pas définie pour $x = 4$.

Pour $x\neq 4$, l'équation $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ équivaut à :

$(2x+1)(x-3)=0$ Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les Solutions sont : $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=3$ c'est-à-dire : $S=\{-1/2;3\}$

Exercice03 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\-3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\geq 0$ et $y\geq 0$ on pose : $X=\sqrt{x}$ et $Y=\sqrt{y}$

Le système devient : $\begin{cases}2X+Y=6\\-3X+5Y=17\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=1$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=4$ donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

Donc : $x=1$ et $y=16$ par suite : $S=\{(1,16)\}$

Exercice04 : 1) Résoudre les équations : a) $|5x+2|=8$ b) $|-2x+1|=-1$ c) $|2x+1|=|3x-4|$

2) Résoudre les inéquations : a) $|2x-3|\leq 1$ b) $|6x+11|\geq\dfrac{1}{6}$ c) $2\leq|10x+2|\leq 5$

Corrigé : 1) a) Résolution de l'équation : $|5x+2|=8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2|=8$ Signifie que : $5x+2=8$ ou $5x+2=-8$

Signifie que : $5x=6$ ou $5x=-10$

Signifie que : $x=\dfrac{6}{5}$ ou $x=-2$

Donc : $S=\left\{-2;\dfrac{6}{5}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-2x+1|=-1$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative

Donc : $S=\varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1|=|3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

PROF: ATMANI NAJIB

$|2x+1|=|3x-4|$ Signifie que : $2x+1=3x-4$ ou $2x+1=-(3x-4)$

Signifie que : $-x=-5$ ou $2x+1=-3x+4$

Signifie que : $x=5$ ou $5x=3$

Signifie que : $x=5$ ou $x=\frac{3}{5}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{5};5\right\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|2x-3|\leq 1$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x-3|\leq 1$ Signifie que : $-1\leq 2x-3\leq 1$

Signifie que : $-1+3\leq 2x-3+3\leq 1+3$

Signifie que : $2\leq 2x\leq 4$

Signifie que : $1\leq x\leq 2$

Donc : $S=[1;2]$

b) Résolution de l'inéquation : $|6x+11|\geq\frac{1}{6}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

$|6x+11|\geq\frac{1}{6}$ Signifie que : $6x+11\geq\frac{1}{6}$ ou $6x+11\leq -\frac{1}{6}$

Signifie que : $6x\geq\frac{1}{6}-11$ ou $6x\leq -\frac{1}{6}-11$

Signifie que : $6x\geq -\frac{65}{6}$ ou $6x\leq -\frac{67}{6}$

Signifie que : $x\geq -\frac{65}{36}$ ou $x\leq -\frac{67}{36}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{67}{36}\right]\cup\left[-\frac{65}{36};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2\leq|10x+2|\leq 5$

$2\leq|10x+2|\leq 5$ Signifie que : $|10x+2|\leq 5$ et $|10x+2|\geq 2$

- Résolution de l'inéquation : $|10x+2|\leq 5$

$|10x+2|\leq 5$ Signifie que : $-5\leq 10x+2\leq 5$

Signifie que : $-5-2\leq 10x+2-2\leq 5-2$

Signifie que : $-7\leq 10x\leq 3$

Signifie que : $-\frac{7}{10}\leq x\leq\frac{3}{10}$

Donc : $S_1=\left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right]$

- Résolution de l'inéquation : $|10x+2|\geq 2$

$|10x+2|\geq 2$ Signifie que : $10x+2\geq 2$ ou $10x+2\leq -2$

Signifie que : $10x\geq 0$ ou $10x\leq -4$

Signifie que : $x\geq 0$ ou $x\leq -\frac{2}{5}$

PROF ATMANI NAJIB

Donc : $S_2 = \left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = \left[-\frac{7}{10};-\frac{2}{5}\right] \cup \left[0;\frac{3}{10}\right]$

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$ 2) $(3x-2)^2 > (x-1)^2$

3) $\frac{3x-2}{x+5} \geq 0$ 4) $\frac{4}{x+1} \leq 3$

Corrigé : 1) L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$ Equivaut à : $(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3) < 0$

On factorise par : $(x-5)$

Equivaut à : $(x-5)[(x-2)-(2x-3)] < 0$

Equivaut à : $(x-5)(x-2-2x+3) < 0$

Equivaut à : $(x-5)(-x+1) < 0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.

On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières

$x-5=0$ Equivaut à : $x=5$

$-x+1=0$ Equivaut à : $x=1$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités : $x<1$ ou $x>5$

La solution est donc : $S =]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$

2) $(3x-2)^2 > (x-1)^2$

Remarque : On pourrait être tenté de supprimer les carrés de chaque côté de la relation d'ordre, c'est à dire d'écrire : 3x − 2 > x − 1. On obtiendrait une partie de la solution, mais pas toute la solution.

En supprimant les carrés, on change l'énoncé.

On procédera donc de la même manière que l'exemple précédent. :

$(3x-2)^2 > (x-1)^2$ Equivaut à : $(3x-2)^2-(x-1)^2 > 0$

Equivaut à : $[(3x-2)-(x-1)][(3x-2)+(x-1)] > 0$

Equivaut à : $(3x-2-x+1)(3x-2+x-1) > 0$

Equivaut à : $(2x-1)(4x-3) > 0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.
On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières

$2x-1=0$ Equivaut à : $x=\frac{1}{2}$

$4x-3=0$ Equivaut à : $x=\frac{3}{4}$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-1)(4x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $\frac{8-2x}{x+5}\geq 0$; Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :
Le dénominateur est nul si : $x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$
On a donc définition de cette inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-5\}$
Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.
$x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$
$8-2x=0$ Equivaut à : $x=4$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{8-2x}{x+5}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le quotient soit positif ou nul, on a donc : $-5<x\leq 4$
La solution est Donc : $S=]-5;4]$

4) $\frac{4}{x+1}\leq 3$; Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :
Le dénominateur est nul si : $x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$
On a donc définition de cette inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-1\}$
On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :
$\frac{4}{x+1}\leq 3$ Equivaut à : $\frac{4}{x+1}-3\leq 0$ Equivaut à : $\frac{4-3x-3}{x+1}\leq 0$ Equivaut à : $\frac{-3x+1}{x+1}\leq 0$
On cherche les valeurs frontières :
$-3x+1=0$ Equivaut à : $x=\frac{1}{3}$
$x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$
On a donc le tableau suivant :

En conclusion pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$x<-1$ ou $x\geq\frac{1}{3}$

La solution est donc :

$S=]-\infty,-1[\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x+1}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Exercice06 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $6x^2-5x+1=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=25-24=1\succ 0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\frac{x+1}{x-1}$ et $x\neq 1$

Nous obtenons l'équation : $6X^2-5X+1=0$

Donc : d'après 1) on a: $X=\frac{1}{2}$ ou $X=\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

Signifie : $2(x+1)=x-1$ ou $3(x+1)=x-1$

Signifie : $2x+2=x-1$ ou $3x+3=x-1$

Signifie : $x=-3$ ou $2x=-4$

Signifie : $x=-3$ ou $x=-2$ Par suite : $S=\{-3;-2\}$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (I) ; $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$

Corrigé : Partie1 : L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est donc $D_E=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

Partie2 : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}-2\leq 0$

Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9-2x^2+10}{x^2-5}\leq 0$ Equivaut à : $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}\leq 0$

$2x^2-3x+1=0$: $\Delta=1>0$ donc $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$1/2$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2-3x+1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		
x^2-5	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$q(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$		

Par suite : $S=\left[-\sqrt{5},\frac{1}{2}\right[\cup[1,\sqrt{5}[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice08 : On considère l´équation : (E) : $6x^3+25x^2+21x-10=0$

1) Montrer que le nombre -2 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

Corrigé :1) On remarque que $6\times(-2)^3+25\times(-2)^2+21\times(-2)-10=-48+100-42-10=100-100=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) le nombre -2 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=6 \\ b+2a=25 \\ c+2b=21 \\ 2c=-10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=6 \\ b=13 \\ c=-5 \end{cases}$

Donc : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$6x^3+25x^2+21x-10=0$ Equivaut à : $(x+2)(6x^2+13x-5)=0$

Equivaut à : $x+2=0$ ou $6x^2+13x-5=0$

Equivaut à : $x=-2$ ou $6x^2+13x-5=0$

Le discriminant de : $6x^2+13x-5=0$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=169+120=289=17^2$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\dfrac{-13-17}{12}=\dfrac{-30}{12}=-\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\dfrac{-13+17}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\dfrac{5}{2};-2;\dfrac{1}{3}\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

On a : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		-2		$1/3$		$+\infty$
$6x^2+13x-5$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$x+2$	$-$	0	$-$	0	$+$		$+$		
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\dfrac{5}{2},-2\right[\cup\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice09 : On considère les polynômes : $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) Démontrer, sans effectuer la division euclidienne, que $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrer en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

b) En déduire une factorisation de $Q(x)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3)a) Calculer : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7}\le 0$

Solution :1) $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) On a : $P(-2)=-4\times(-2)^3+8(-2)^2+25\times(-2)-14=32+32-50-14=64-64=0$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrons en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ on trouve :

$$\begin{array}{r|l} -4x^3+8x^2+25x-14 & x+2 \\ \hline -(-4x^3-8x^2) & -4x^2+16x-7 \\ \hline +0x^3+16x^2+25x & \\ -(+16x^2+32x) & \\ \hline +0x^2-7x-14 & \\ -(-7x-14) & \\ \hline +0 & \end{array}$$

On a donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-4x^2+16x-7$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $Q(x)=0$:

$-4x^2+16x-7=0$

Le discriminant de : $-4x^2+16x-7=0$ est : $\Delta=(16)^2-4\times(-7)\times(-4)=144=12^2>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-16+12}{2\times(-4)}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-16-12}{2\times(-4)}=\dfrac{-28}{-8}=\dfrac{7}{2}$ Par conséquent : $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right\}$

b) Déduction d'une factorisation de $Q(x)$:

$Q(x)=-4x^2+16x-7$ Admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7}{2}$

Donc : $Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-2\times2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-(2x-1)(2x-7)$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x+2)Q(x)=0$ Signifie que : $x+2=0$ ou $Q(x)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $x_0=-2$ ou $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{7}{2}$ Par conséquent : $S=\left\{-2;\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

3)a) Calculons : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times1+1^2=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

Le discriminant de : $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ est :

$\Delta=b^2-4ac=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times1=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$

$\Delta=1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

Donc : il y'a deux solutions :

$x_1=\frac{-\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{3}-1+\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{3}-1-\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$

Or: $1+\sqrt{3}\succ0$ Donc: $\left|1+\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

Par suite : $S=\left\{-1,\sqrt{3}\right\}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7}\le0$

$Q(x)=-4x^2+16x-7$ admet deux racines : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{7}{2}$

Et $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ admet deux racines : $x_1=\sqrt{3}$ et $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x^2+16x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{(x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3})}{-4x^2+16x-7}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Par suite : $S=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]\cup\left]\frac{7}{2},+\infty\right[$

Exercice10 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

7π , $\frac{110\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{131\pi}{3}$, $-\frac{217\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Solution :

▪ $x=7\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = 7\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < 7\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ Équivalent à : $\pi - 7\pi < 2k\pi \leq \pi - 7\pi$

Équivalent à : $-8 < 2k \leq -6$ Équivalent à : $-4 < k \leq -3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -3$ et donc $\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = 7\pi$ est $\alpha = \pi$

▪ $x = \dfrac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \dfrac{110\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \dfrac{110\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \dfrac{110\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \dfrac{110\pi}{3}$

Équivalent à : $-\dfrac{113\pi}{3} < 2k\pi \leq -\dfrac{107\pi}{3}$

Équivalent à : $-\dfrac{113}{6} < k \leq -\dfrac{107}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-18.83 < k \leq -17.83$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -18$ et donc $\alpha = \dfrac{110\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \dfrac{110\pi - 108\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \dfrac{110\pi}{3}$ est $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

▪ $x = \dfrac{19\pi}{4}$ On a $\dfrac{19\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = 4\pi + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisse curviligne principale associée a $\dfrac{19\pi}{4}$ est $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

▪ $x = -\dfrac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = -\dfrac{131\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\dfrac{131\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi + \dfrac{131\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \dfrac{131\pi}{3}$

Équivalent à : $\dfrac{128\pi}{3} < 2k\pi \leq \dfrac{134\pi}{3}$

Équivalent à : $\dfrac{128}{6} < k \leq \dfrac{134}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $21.33 < k \leq 22.33$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 22$ et donc $\alpha = -\dfrac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\dfrac{131\pi}{3} + 2(22)\pi = \dfrac{-131\pi + 132\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x = -\dfrac{131\pi}{3}$ est $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

▪ $x = -\dfrac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = -\dfrac{217\pi}{6} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -\dfrac{217\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB

Équivalent à : $-\pi+\frac{217\pi}{6}<2k\pi\leq\pi+\frac{217\pi}{6}$ Équivalent à : $\frac{211\pi}{6}<2k\pi\leq\frac{223\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{211}{12}<k\leq\frac{223}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $17.58<k\leq18.58$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=18$ et donc : $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi=-\frac{217\pi}{6}+2(18)\pi=\frac{-217\pi+216\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=-\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$ et $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\times2\pi$ On a $x=\frac{7\pi}{2}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{7\pi}{2}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

▪ $x=\frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$ on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times251\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

Methode2 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-1<\frac{2007}{4}+2k\leq1$

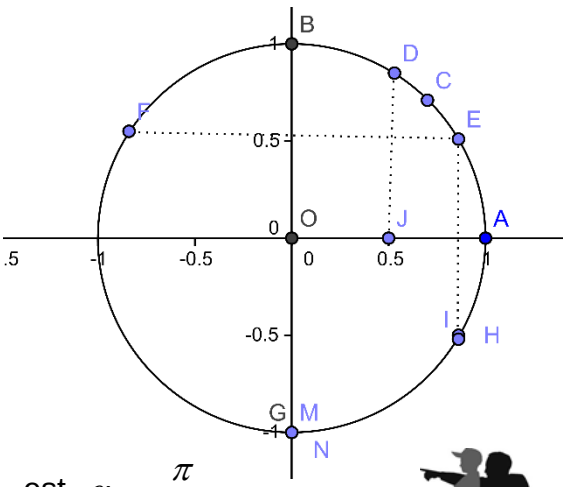
Équivalent à : $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq1-\frac{2007}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

c'est-à-dire : $-\frac{2011}{8}<k\leq\frac{2003}{8}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

Donc $k=-251$ par suite : $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB