Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(3x+1)(2x-1)-4x^2+1=0$ 2) $x^3+27+2(x^2-9)-3x-9=0$ 3) $\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$

Corrigé : 1) $(3x+1)(2x-1)-4x^2+1=0$ équivaut à : $(3x+1)(2x-1)-(4x^2-1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)(2x-1)-(2x-1)(2x+1)=0$

Équivaut à : $(2x-1)[(3x+1)-(2x+1)]=0$

Équivaut à : $(2x-1)(3x+1-2x-1)=0$

Équivaut à : $x(2x-1)=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $2x-1=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x=\frac{1}{2}$ d''où : $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

2) $x^3+27+2(x^2-9)-3x-9=0$ équivaut à : $x^3+3^3+2(x^2-3^2)-3(x+3)=0$

Équivaut à : $(x+3)(x^2-3x+9)+2(x+3)(x-3)-3(x+3)=0$ car : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Équivaut à : $(x+3)[(x^2-3x+9)+2(x-3)-3]=0$

Équivaut à : $(x+3)(x^2-3x+9+2x-6-3)=0$ c'est-à-dire : $(x+3)(x^2-x)=0$

Équivaut à : $x(x+3)(x-1)=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x+3=0$ ou $x-1=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x=-3$ ou $x=1$ d''où : $S=\{-3;0;1\}$

3) $\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$

Cette équation n'existe pas si $x-1=0$ et si $\sqrt{2}x-2$

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$

$\sqrt{2}x-2=0$ Équivaut à : $x=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Les valeurs interdites de cette équation sont 1 et $\sqrt{2}$. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}\backslash\{1;\sqrt{2}\}$.

$\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$ Équivaut à : $(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x-2)=(2x-2)(x-1)$

Équivaut à : $2x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{2}x+2=2x^2-2x-2+1$

Équivaut à : $-3\sqrt{2}x+2x=-3$

Équivaut à : $(-3\sqrt{2}+2)x=-3$

Équivaut à : $x=\frac{-3}{-3\sqrt{2}+2}=\frac{3}{3\sqrt{2}-2}=\frac{3\left(3\sqrt{2}+2\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\right)\left(3\sqrt{2}+2\right)}=\frac{3\left(3\sqrt{2}+2\right)}{18-4}=\frac{3\left(3\sqrt{2}+2\right)}{14}\in D_E$ d''où : $S=\left\{\frac{3\left(3\sqrt{2}+2\right)}{14}\right\}$

Exercice02 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(1-6x)(3x-12)}{x-5}=0$ 2) $\frac{(2x-5)(3x-1)}{4x^2-25}=0$

Corrigé : 1) $\frac{(1-6x)(3x-12)}{x-5}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x-5\neq 0$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{5\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(1-6x)(3x-12)}{x-5}=0$ Signifie : $(1-6x)(3x-12)=0$

Signifie : $1-6x=0$ ou $3x-12=0$

Signifie : $x=\frac{1}{6}\in D_E$ ou $x=4\in D_E$ et par suite : $S=\left\{\frac{1}{6};4\right\}$

2) $\frac{(2x-5)(3x-1)}{4x^2-25}=0$

On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $4x^2-25\neq 0$

$4x^2-25=0$ Signifie : $x^2=\frac{25}{4}$ signifie : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{5}{2}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\}$

b) Résolvons l'équation :

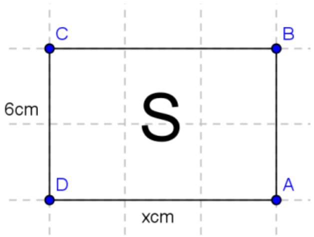
$\frac{(2x-5)(3x-1)}{4x^2-25}=0$ Signifie : $(2x-5)(3x-1)=0$

Signifie : $2x-5=0$ ou $3x-1=0$

Signifie : $x=\frac{5}{2}\notin D_E$ ou $x=\frac{1}{3}\in D_E$ et par suite : $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Exercice03 : Quelle est la longueur d'un rectangle sachant que sa largeur est 6cm et sa surface vaut le double de son périmètre **?**

Corrigé : Soit S La surface du rectangle $ABCD$
Et P Le périmètre du rectangle $ABCD$
Soit x La longueur du rectangle



On a donc : $S=6x$ et $P=2(6+x)=12+2x$

$S=2P$ Signifie $6x=2(12+2x)$

Signifie $6x=24+4x$ c'est-à-dire : $2x=24$

Signifie $x=\frac{24}{2}=12cm$

Exercice04 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$(m+3)x+4m=-(7-3m)x+5m-5$

Corrigé : on va écrire cette équation sous la forme : $ax+b=0$

$(m+3)x+4m=-(7-3m)x+5m-5$ Équivalent à : $(m+3)x+(7-3m)x+4m-5m+5=0$

Équivalent à : $(m+3+7-3m)x+4m-5m+5=0$

Équivalent à : $(-2m+10)x-m+5=0$

1ére cas : $-2m+10\neq 0$ c'est à dire : $m\neq 5$

$(-2m+10)x-m+5=0$ Équivalent à : $(-2m+10)x=m-5$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{m-5}{-2m+10}=\frac{m-5}{-2(m-5)}=-\frac{1}{2}$ Par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2ére cas : $-2m+10=0$ c'est à dire : $m=5$

L'équation devient : $0x+0=0$ (0=0)

Par suite : $S=\mathbb{R}$

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|x-2|-|4-x|-1=0$

Corrigé : 1) $|x-2|-|4-x|-1=0$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$4-x=0$ Signifie que : $x=4$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$		$x-2$		$x-2$
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\|x+2\|$	$4-x$		$4-x$		$x-4$
$\|x-2\|-\|4-x\|-1$	-3		$2x-7$		1

Si : $x\leq 2$ alors :

$|x-2|-|4-x|-1=0$ devient :

$-3=0$ impossible donc : $S_1=\varnothing$

Si : $2\leq x\leq 4$ alors : l'équation devient : $2x-7=0$ Ce qui Signifie que : $x=\frac{7}{2}\in[2;4]$

Donc : $S_2=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Si : $x\geq 4$ alors : l'équation devient $1=0$ impossible donc : $S_3=\varnothing$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Exercice06 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$ 3) $-6x+7>x-7$ 4) $(x+1)\sqrt{2}+(1-x)\sqrt{3}\leq 0$

5) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}-3}\prec\frac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$ 6) $4x^2-9\geq 0$ 7) $(1-x)(2x+4)>0$ 8) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ 9) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

Corrigé : 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ Équivalent à : $x=6$ $-2=a$ et $a<0$ coefficient de x négatif

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	$+$	0	$-$

Donc : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$

$5x-15=0$ Équivalent à : $x=3$ $5=a$ et $a>0$ coefficient de x positif

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15$	$-$	0	$+$

Donc : $S=]-\infty;3[$

3) $-6x+7>x-7$ Équivalent à : $-7x>-14$

Équivalent à : $x<\frac{-14}{-7}$ Équivalent à : $x<2$

L'ensemble de solution est alors : $S = \left]-\infty ; 2\right[$

4) $(x+1)\sqrt{2}+(1-x)\sqrt{3} \leq 0$

Équivalent à : $x\sqrt{2}-x\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3} \leq 0$

Équivalent à : $x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \leq -\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

Équivalent à : $x \geq -\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ car $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$

Équivalent à : $x \geq -\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2}$

Équivalent à : $x \geq \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

Équivalent à : $x \geq 5+2\sqrt{6}$

L'ensemble de solution est alors : $S = \left[5+2\sqrt{6} ; +\infty\right[$

5) $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3}-3} \prec \dfrac{3x-2}{\sqrt{3}+3}$ Équivalent à : $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3}-3}-\dfrac{3x-2}{\sqrt{3}+3} \prec 0$

Équivalent à : $\dfrac{(3x-1)\left(\sqrt{3}+3\right)-\left(\sqrt{3}-3\right)(3x-2)}{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)} \prec 0$

Équivalent à : $\dfrac{18x+\sqrt{3}-9}{-6} \prec 0$

Équivalent à : $18x+\sqrt{3}-9 \succ 0$

Équivalent à : $18x \succ 9-\sqrt{3}$ c'est-à-dire : $x \succ \dfrac{9-\sqrt{3}}{18}$ par suite : $S = \left[\dfrac{9-\sqrt{3}}{18} ; +\infty\right[$

6) $4x^2-9 \geq 0$

$4x^2-9=0$ Équivalent à : $(2x)^2-3^2=0$ donc : $(2x-3)(2x+3)=0$

Équivalent à : $2x+3=0$ ou $2x-3=0$

Équivalent à : $x=\dfrac{-3}{2}$ ou $x=\dfrac{3}{2}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-3/2$		$3/2$	$+\infty$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left]-\infty ; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$

7) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ Équivalent à : $2x+4=0$ Ou $1-x=0$ Équivalent à : $x=-2$ ou $x=1$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+4)(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $S=]-2;1[$

8) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ (Signe d'un quotient méthode)

• Donner l'ensemble de définition.
• Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :
Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+).
Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif
Cette inéquation existe si $1+3x\neq 0$

$1+3x=0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$. L'inéquation est donc définie sur $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$5x-2=0$ Équivalent à : $x=\frac{2}{5}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$1+3x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{5x-2}{1+3x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Attention à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite : donc

: $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

9) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

Cette inéquation existe si $2x-6\neq 0$

$2x-6\neq 0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$. L'inéquation est donc définie sur $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$2x-6\neq 0$ Équivalent à : $x\neq 3$

On a le tableau de signe suivant : $D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

$2x+1=0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{2}$

$5x-10=0$ Équivalent à : $x=2$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{(2x-6)}$	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$

Corrigé : Partie1 : L'ensemble de définition de l'équation (E) est donc $D_E=\{-5\}$.

Partie2 : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$ Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-2=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-\frac{2x+10}{x+5}=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-5x-6}{x+5}=0$

Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

Δ = 49 > 0 donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est S = {−1 ; 6} (car les solutions trouvées sont différentes de −5).

Exercice08 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-7x-8=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $x^6-7x^3-8=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=81\succ 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{7-9}{2}=-1$ et $x_2=\frac{7+9}{2}=8$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $x^6-7x^3-8=0$ Signifie que : $\left(x^3\right)^2-7\left(x^3\right)-8=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2-7X-8=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-1$ ou $X=8$

Donc : $x^3=-1$ ou $x^3=8$.

Equivalent a: $x=-1$ ou $x=2$ par suite : $S=\{-1;2\}$

Exercice09 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$ 2) $x^2+3x-5<-x+2$ 3) $\frac{2x+6}{x^2-4x-96}<0$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.

Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est : Δ = 6^2 – 4 x 3 x (-9) = 36 + 108 = 144.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont : $x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6+12}{6}=1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty;-3[$ et $]1;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

Etudier le Signe d'un trinôme :

2) $x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est Δ = 4² – 4 x 1 x (-7) = 44 et ses racines sont :

Et $x_2=\frac{-4+\sqrt{44}}{2\times 1}=-2+\sqrt{11}$ $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $S=\left]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right[$.

3) $\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}<0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $-x^2+4x+96\neq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:

Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est Δ = 4² – 4 x 96x (-1) = 400 et ses racines sont :

$x_1=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4+20}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4-20}{-2\times 1}=\frac{-24}{-2}=12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]-8;-3\right]\cup\left]12;+\infty\right[$.

Exercice10 : On considère l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

1) On pose : $a=\sqrt{13}-1$ et $b=\sqrt{13}+3$

Vérifier que : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}$ et montrer que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

2) Déduire sans calculer le discriminant Δ les solutions de l'équation (E)

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donner une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$

Solution : 1) a) $b=\sqrt{13}+3$ et $a=\sqrt{13}-1$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+3}=\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13-3\sqrt{13}-\sqrt{13}+3}{13-9}=\frac{16-4\sqrt{13}}{4}=4-\sqrt{13}$$

Montrons que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

$\left(4-\sqrt{13}\right)^2-8\left(4-\sqrt{13}\right)+3=16-8\sqrt{13}+13-32+8\sqrt{13}+3=0$

Donc : $\frac{a}{b}$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

2) On a : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$: Donc : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}=x_1$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

Soit : x_2 l'autre solution donc : $x_1+x_2=\frac{-(-8)}{1}=8$ c'est-à-dire : $x_2=8-\left(4-\sqrt{13}\right)=4+\sqrt{13}$

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donnons une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$?

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(4-\sqrt{13}\right)^2+\left(4+\sqrt{13}\right)^2}{\left(4-\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{13}\right)}=\frac{4^2-8\sqrt{13}+13+4^2+8\sqrt{13}+13}{16-13}=\frac{58}{3}$$ et $P=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1$

Donc : l'équation du second degré est : $x^2-Sx+P=0$ c'est-à-dire : $x^2-\frac{58}{3}x+1=0$

Ou : l'équation du second degré est : $3x^2-58x+3=0$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$

Solution : méthode1 : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)\times y=4 \end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ c'est-à-dire : $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 1}=1$ et

$y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 1}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Méthode1 : Pour résoudre le système : $(I)\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés il suffit de résoudre

L'équation : $x^2-sx+p=0$

Dans notre exercice : résoudre l'équation : $x^2-5x+4=0$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.et on finit de la même façon que la méthode1

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $3x|x+1|+x-2=0$ 2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$ 3) $2x|x-1|-|x-2|=0$

Solution :1) $3x|x+1|+x-2=0$

Si $x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$ donc : $|x+1|=x+1$

Donc : l'équation devient : $3x(x+1)+x-2=0$ qui Signifie que : $3x^2+4x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=4+2\times 3=10\succ 0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$

Mais : $x_1=-1\notin[-1;+\infty[$ donc : $S_1=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Si $x\leq -1$ alors $x+1\leq 0$ donc : $|x+1|=-x-1$

Donc : l'équation devient : $-3x(x+1)+x-2=0$ qui signifie que : $-3x^2-2x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-6=-5\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions donc : $S_2=\varnothing$.

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0$ Signifie : $x^2=4$ Signifie : $x=2$ donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation : étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1+2=3\succ 0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2 donc : $S_1=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=-2$ c'est-à-dire : $x^2+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta' \prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_2 = \varnothing$ Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$

3) $2x|x-1| - |x-2| = 0$

x	$-\infty$	1	2 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0	$-$	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$

D'après ce tableau on a trois possibilités

Si $x \prec 1$ alors : l'équation devient : $2x(-x+1)-(-x+2)=0$

Signifie : $-2x^2+3x-2=0$: Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = 9-16 = -7 \prec 0$

Donc : $S_1 = \varnothing$

Si $1 \prec x \le 2$ alors : l'équation devient : $2x(x-1)-(-x+2)=0$ qui signifie que: $2x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = 1+16 = 17 \succ 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$

Seulement x_1 vérifie : $1 \prec x \le 2$ Donc : $S_2 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Si $x \succ 2$ alors l'équation devient : $2x(x-1)-(x-2)=0$ qui signifie que: $2x^2-3x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ de l'équation : $\Delta = b^2-4ac = -7 \prec 0$

Comme $\Delta \prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions.

Donc : $S_3 = \varnothing$ par suite : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

Exercice13 : On considère l´équation : (E) : $2x^3-13x^2+5x+6=0$

1) Montrer que le nombre 1 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

Corrigé :1) On remarque que $2\times1^3-13\times1^2+5\times1+6 = 2-13+5+6 = 13-13 = 0$

Donc : le nombre 1 est solution de (E)

2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-13 \\ c-b=5 \\ -c=6 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=2 \\ b=-11 \\ c=-6 \end{cases}$ Donc : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(2x^2-11x-6)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$2x^3-13x^2+5x+6=0$ Equivaut à : $(x-1)(2x^2-11x-6)=0$ Equivaut à : $x-1=0$ ou $2x^2-11x-6=0$

Equivaut à : $x=1$ ou $2x^2-11x-6=0$

Le discriminant de : $2x^2-11x-6=0$ est : $\Delta=(-11)^2-4\times2\times(-6)=121+48=169=13^2$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{11-\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11-13}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{11+\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11+13}{4}=\frac{24}{4}=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\frac{1}{2};1;6\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

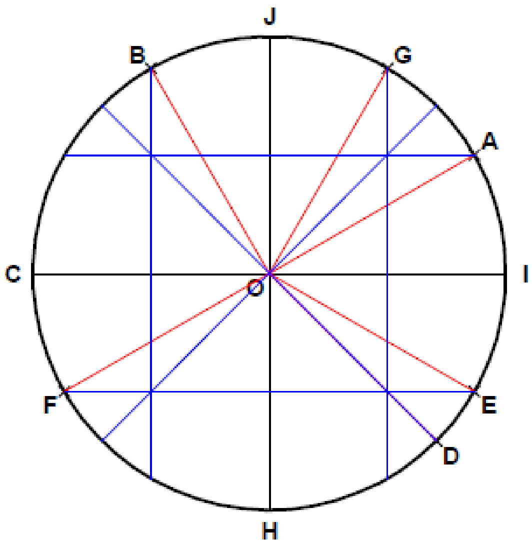
On a : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(2x^2-11x-6)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		6		$+\infty$
$2x^2-11x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,6\right[$

Exercice14: Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer un abscisse curviligne associés aux points : A; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J



Solution : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $C(\pi)$; $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $I(0)$; $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice15 : Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi\prec\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\leq\pi$

Équivalent à : $-1\prec\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{3}\prec\frac{k}{2}\leq 1-\frac{1}{3}$

Équivalent à : $-\frac{4}{3}\prec\frac{k}{2}\leq\frac{2}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{8}{3}\prec k\leq\frac{4}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

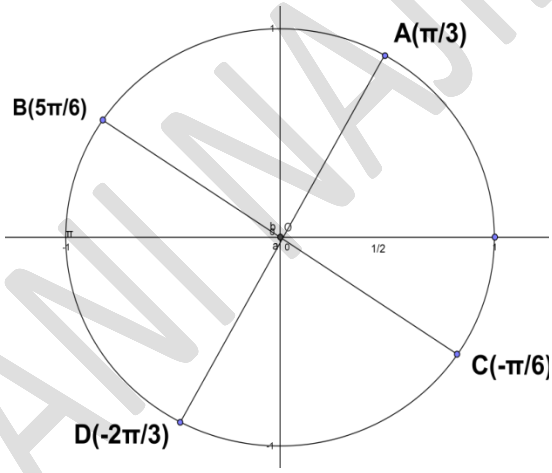
Par suite : $k=-2$ ou $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Si $k=1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Si $k=-1$ alors : $C\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Si $k=-2$ alors : $D\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien