http://www.xriadiat.com **DL3 B** **PROF: ATMANI NAJIB**

**Tronc commun Sciences BIOF**

# *Correction :* Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

**Exercice01 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+6=-x\sqrt{3}-\sqrt{27}$ 2) $-5(3x+5)=-15x-24$ 3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

4) $(25x^2-4)-2(5x+2)(x+4)=0$ 5) $36x^2-49=0$ 6) $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$

**Solution :**1) $2x+6=-x\sqrt{3}-\sqrt{27}$ Équivaut à : $2x+x\sqrt{3}=-\sqrt{9\times3}-6$

Équivaut à $x\left(2+\sqrt{3}\right)=-3\left(\sqrt{3}+2\right)$

Équivaut à : $x=\frac{-3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=-3$ et par suite : $S=\{-3\}$

2) $-5(3x+5)=-15x-24$ équivaut à $-15x-25=-15x-24$ équivaut à $0x=1$

Équivaut à $0=1$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\emptyset$

3) $5(2x-3)=12x-2\left(x+\frac{15}{2}\right)$

Équivaut à $10x-15=12x-2x-15$ équivaut à $10x-15=10x-15$

Équivaut à $10x-15=10x-15$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\mathbb{R}$

4) $(25x^2-4)-2(5x+2)(x+4)=0$ signifie que :$\left((5x)^2-2^2\right)-2(5x+2)(x+4)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(5x-2)-2(5x+2)(x+4)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)\left[(5x-2)-2(x+4)\right]=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(5x-2-2x-8)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x+2)(3x-10)=0$

Ce qui est équivalent à : $5x+2=0$ ou $3x-10=0$

Ce qui est équivalent à : $x=-\frac{2}{5}$ ou $x=\frac{10}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{5};\frac{10}{3}\right\}$

5) $36x^2-49=0$ équivalent à : $(6x)^2-7^2=0$

C'est une identité remarquable de la forme : a² - b² = (a - b) (a + b),

Équivalent à : $(6x-7)(6x+7)=0$

Équivalent à : $6x+7=0$ ou $6x-7=0$

Équivalent à : $x=-\frac{7}{6}$ ou $x=\frac{7}{6}$ D'où : $S=\left\{-\frac{7}{6};\frac{7}{6}\right\}$

6) $\frac{2}{x+3}-\frac{7}{x-3}=0$

Cette équation n'existe pas si : $x+3=0$ ou $x-3=0$

Les valeurs interdites de cette équation sont $-3$ et $3$. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

On commence par réduire au même dénominateur les deux fractions. Le dénominateur commun est : $(x+3)(x-3)$

$\frac{2}{x+3}-\frac{7}{x-3}=0$ Équivalent à $\frac{2(x-3)-7(x+3)}{(x+3)(x-3)}=0$

Équivalent à $\frac{2x-6-7x-21}{(x+3)(x-3)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{-5x-27}{(x+3)(x-3)}=0$

Donc : $-5x-27=0$ car le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Équivalent à : $x=-\frac{27}{5}\in\mathbb{R}-\{-3,3\}$

d'où : $S=\left\{-\frac{27}{5}\right\}$

**Exercice02 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$ 2) $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$

**Solution :**1) $\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $2x+1\neq 0$

$2x+1\neq 0$ si et seulement si $x\neq -\frac{1}{2}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(1-3x)(3x+18)}{2x+1}=0$ Signifie : $(1-3x)(3x+18)=0$

Signifie : $1-3x=0$ ou $3x+18=0$

Signifie : $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-6$ et par suite : $S=\left\{-6;\frac{1}{3}\right\}$

2) $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$ :On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ Signifie : $x^2=9$ signifie : $x=3$ ou $x=-3$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$

$\frac{(x-3)(2x-7)}{x^2-9}=0$ Signifie : $(x-3)(2x-7)=0$

Signifie : $2x-7=0$ ou $x-3=0$ Signifie : $x=\frac{7}{2}$ ou $x=3\notin D_E$ et par suite : $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

**Exercice03 :** HASSAN **a** 10 ans quand sa mère Aicha **30**ans
Dans combien d'années l'âge de HASSAN sera-t-il la moitié de l'âge de Aicha **?**
**Solution :** Soit $x$ le nombre d'années cherché

Après $x$ années l'âge de HASSAN devient : $x+10$ ans
Puisque l'âge de HASSAN sera-t-il la moitié de l'âge de Aicha
On a : $x+10=\frac{1}{2}(x+30)$ ce qui équivaut à : $2x+20=x+30$ c'est-à-dire : $x=10$
Donc : après 10 années HASSAN aura : $10+10=20$ ans
Et sa mère Aicha aura : $30+10=40$ ans (le double de l'âge de HASSAN)

**Exercice04 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$
3) $|x+2|=-1$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$ 5) $|x-1|+|2-x|-3=0$

**Solution : Méthode 1** (Équations ou inéquations de référence) :

**1)** $|x-1|=5$ Signifie que : $x-1=5$ ou $x-1=-5$
Signifie que : $x=6$ ou $x=-4$ Donc : $S=\{-4;6\}$

**2)** $|2x+1|=|x-3|$ signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$
Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$
Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ car $|x+2|\geq 0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$
$x-1=0$ Signifie que : $x=1$
$3-x=0$ Signifie que : $x=3$

| $x$ | $-\infty$    1 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$   0 | $+$ | $+$ |
| $\|x-1\|$ | $-x+1$   0 | $x-1$ | $x-1$ |
| $3-x$ | $+$ | $+$   0 | $-$ |
| $\|3-x\|$ | $3-x$ | $3-x$   0 | $x-3$ |
| $\|x-1\|+\|3-x\|-3$ | $1-2x$ | $-1$ | $2x-7$ |

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$
Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$
Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq 1$ ; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$
Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$
Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$
Ce qui signifie que : $2x-7=0$
Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$
Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

5) $|-3x+4|+|-5+x|=10$

✎ On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$-3x+4=0$ Signifie que : $x=\frac{4}{3}$

$-5+x=0$ Signifie que : $x=5$

✎ On remplit un tableau de forme :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{3}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert -3x+4\rvert$ | | $-3x+4$ | $0$ | $3x-4$ | $11$ | $3x-4$ | |
| $\lvert -5+x\rvert$ | | $5-x$ | $\frac{11}{3}$ | $5-x$ | $0$ | $-5+x$ | |
| $(E_1)$ | | $-4x+9=10$ <br> $x=-\frac{1}{4}$ <br> possible | | $2x+1=10$ <br> $x=\frac{9}{2}$ <br> possible | | $4x-9=10$ <br> $x=\frac{19}{4}$ <br> impossible | |

On obtient alors deux solutions : $S=\left\{-\frac{9}{4};\frac{9}{2}\right\}$

**Exercice05 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $x^2\leq 1$ 2) $\frac{2}{x-2}\leq\frac{3}{x+1}$

**Solution :** Méthode : Pour résoudre une inéquation du type :
A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)

- 1. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation
- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.
- 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

**1)** $x^2\leq 1$ Equivaut à : $x^2-1\leq 0$ Equivaut à : $x^2-1^2\leq 0$ Equivaut à : $(x+1)(x-1)\leq 0$

$(x+1)(x-1)\leq 0$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On cherche à résoudre l'inéquation : $(x+1)(x-1)\leq 0$

Par conséquent : $S=[-1,1]$

2) $\frac{2}{x-2}<\frac{3}{x+1}$

- 1. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 2$ ou $x\neq -1$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

- 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{2}{x-2}<\frac{3}{x+1}$ Signifie que : $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+1}<0$ Signifie que : $\frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)}<0$

Signifie que : $\frac{2x+2-3x+6}{(x-2)(x+1)}<0$ Signifie que : $\boxed{\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}<0}$

● 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.
$-x+8=0$ Équivaut à : $x=8$ et $x-2=0$ qui signifie que : $x=2$ et $x+1=0$ qui signifie que : $x=-1$
Remarque :-1 et 2 sont des valeurs interdites car elle annule les dénominateurs $x+1$et $x-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+8$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{-x+8}{(x-2)(x+1)}<0$

Donc : $S=]-1,2[\cup]8,+\infty[$

**Exercice06 : 1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'inéquation : $|x-1|\geq 3$

**2)**Résoudre Graphiquement l'inéquation : $|x-1|\geq 3$

**Solution :**1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

**Règle :** $|x-a|\geq r$ **est équivalente à :** $x-a\geq r$ ou $x-a\leq -r$ avec $r>0$

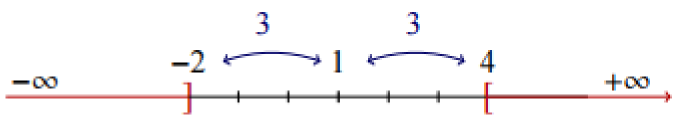
D'après notre règle, on a donc :

$|x-1|\geq 3$ Signifie que : $x-1\geq 3$ ou $x-1\leq -3$

Signifie que : $x\geq 4$ ou $x\leq -2$
On obtient alors l'union d'intervalle suivant : ] − ∞ ; −2] et [4 ; +∞[
Donc : $S$=] − ∞ ; −2] ∪ [4 ; +∞[

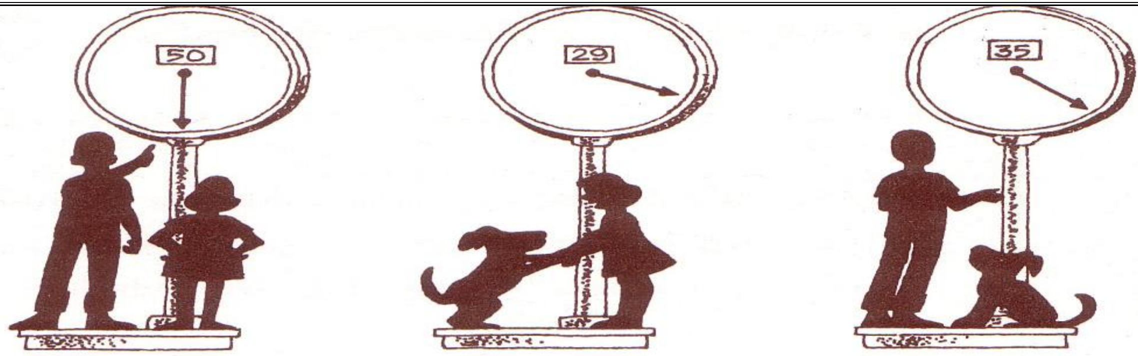
1) **Résolvons notre inéquation Graphiquement :** $|x-1|\geq 3$

**Graphiquement** Cela revient à Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles la distance de $x$ à 1 est supérieure ou égale à 3.
Visualisons ce problème sur la droite des réels.




On obtient alors l'union d'intervalle suivant : ] − ∞ ; −2] et [4 ; +∞[
Donc : $S$=] − ∞ ; −2] ∪ [4 ; +∞[

**Exercice07 :** Pouvez-vous donner le poids de chacun ?




**Solution :** Les nombres «x : poids du garçon » et « y poids du fille » et « z poids du chien »

Satisfont donc au système formé par les équations : $\begin{cases} x+y=50 \\ y+z=29 \\ x+z=35 \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} x+y=50 \\ y+z=29 \\ x+z=35 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=50-x \\ y+z=29 \\ x+z=35 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=50-x \\ 50-x+z=29 \\ x+z=35 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=50-x \\ -x+z=29-50 \\ x+z=35 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=50-x \\ -x+z=-21 \\ x+z=35 \end{cases}$

Résolvons le système : $\begin{cases} -x+z=-21 \\ x+z=35 \end{cases}$ On additionne les deux membres terme à terme

Donc : $2z=35-21$ Donc : $2z=14$ Donc : $z=7kg$

On reporte ce résultat dans le système : $\begin{cases} x+y=50 \\ y+7=29 \\ x+7=35 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x+y=50 \\ y=29-7 \\ x=35-7 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x+y=50 \\ y=22 \\ x=28 \end{cases}$

Finalement : $x=28kg$ et $y=22kg$ et $z=7kg$

**Exercice08 : 1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} -7x-3y=4 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant : $\begin{cases} \dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2 \end{cases}$

**Solution :**1) Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ **et** $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$$\begin{cases} -7\frac{1}{x}-3\frac{1}{y}=4 \\ 4\frac{1}{x}+5\frac{1}{y}=-2 \end{cases}$$ On pose : $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$ Le système devient : $\begin{cases} -7X-3Y=4 \\ 4X+5Y=-2 \end{cases}$

D'après 1) on a : $X=-\frac{14}{23}$ et $Y=-\frac{2}{23}$

Donc : $\frac{1}{x}=-\frac{14}{23}$ et $\frac{1}{y}=-\frac{2}{23}$

Donc : $x=-\frac{23}{14}$ et $y=-\frac{23}{2}$ par suite : : $S=\left\{\left(-\frac{23}{14},-\frac{23}{2}\right)\right\}$

**Exercice09 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

**Solution : a**) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$ : a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$ donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

Et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée : $2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2-x-6=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ : a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ a une forme factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$ : a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$ . On a : $\Delta=1+24=25$ : $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ par suite : $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

**Exercice10 :** Soit : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

1) Déterminer une racine évidente de $F(x)$

2) Déterminer alors la factorisation de $F(x)$ en un produit de monômes du premier degré.

3) Etudier le signe de : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $F(x)>0$

**Solution :1)**1) $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

On remarque que $F(-2)=0$ donc -2 est une racine évidente de $F(x)$.

2) -2 est une racine évidente de $F(x)$.Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x)=(x-(-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=6 \\ b+2a=25 \\ c+2b=21 \\ 2c=-10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=6 \\ b=13 \\ c=-5 \end{cases}$

$F(x)=(x+2)(6x^2+13x-5)$.

Le discriminant de : $6x^2+13x-5$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=289=17^2$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13-17}{12}=-\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13+17}{12}=\frac{1}{3}$

$6x^2+13x-5=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=2\times3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-1)(2x+5)$

Donc : $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

3) $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $2x+5$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

4) $F(x)>0$ Équivaut à : $x\in\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x)>0$ est : $S=\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

**Exercice11 :** Soit le trinôme $(T)$: $-2x^2+\sqrt{2}x+2$

1) Prouver que le trinôme $(T)$ admet deux racines distinctes $\alpha$ et $\beta$ sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$ ; $\alpha\times\beta$ ; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ; $\alpha^2+\beta^2$ ; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ ; $\alpha^3+\beta^3$

**Solution :**1) : $a=-2$ **et** **et** $b=\sqrt{2}$ **et** $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

Comme $\Delta>0$ : le trinôme $(T)$ : a deux racines distinctes : $\alpha$ et $\beta$

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

donc $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

**Exercice12 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4-2x^2+1=0$ 2) $3x^4-2x^2-1=0$

**Solution :**1) $x^4-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta$ = (-2)² – 4 x 1 x 1 =4 - 4 = 0

La solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\frac{-(-2)}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ Donc on a : $x^2=1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$ et par suite : $S=\{-1;1\}$

2) $3x^4-2x^2-1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$

Nous obtenons l'équation : $3X^2-2X-1=0$

$\Delta$ = (-2)² – 4 x 3x (-1) =4 + 12 = 16

Les solutions de : $3X^2-2X-1=0$ sont : $X_1=\frac{-(-2)+4}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ et $X_2=\frac{-(-2)-4}{2\times3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

Donc : $x^2=1$ et $x^2=\frac{-1}{3}$

Or l'équation : $x^2=\frac{-1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : on a $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S=\{-1;1\}$

**Exercice13 :** Soit sur un cercle trigonométrique d'origine $I$ les points $A$ ; $B$; $C$; $D$ d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{85\pi}{3}$ ; $\frac{-139\pi}{6}$ ; $\frac{7\pi}{4}$ ; $\frac{11\pi}{6}$.

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points

2) En déduire les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)$

**Solution :1)** Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

$A\left(\frac{85\pi}{3}\right)$ : $\frac{85\pi}{3}=\frac{84\pi+\pi}{3}=\frac{84\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=28\pi+\frac{\pi}{3}$

On a : $\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point $A$

$B\left(\frac{139\pi}{6}\right)$ : $\frac{-139\pi}{6}=\frac{-144\pi+5\pi}{6}=\frac{-144\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=-24\pi+\frac{5\pi}{6}$

On a : $\frac{5\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point $B$

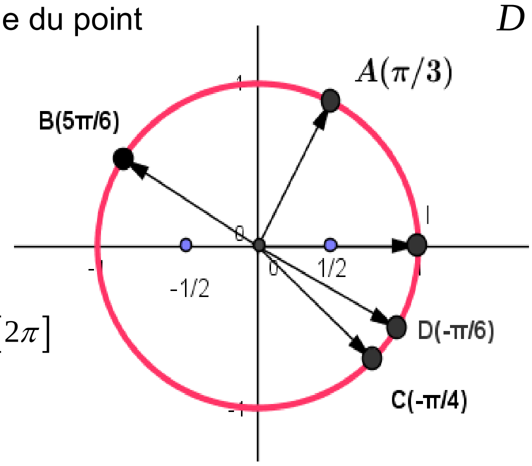
$C\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ : $\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$

On a : $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale

Du point $C$.

$D\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ : $\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}$

On a : $-\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point $D$




2) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

**Exercice14:** On a : $\tan(x)=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

**Solution :** 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $10\cos^2 x=9$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ : donc $\cos x \leq 0$ et par suite : $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ : donc $\sin x = \tan x \times \cos x$

Donc : $\sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*