Tronc commun Sciences BIOF

Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1**
- ✓ **Equations et inéquations du second degré**
- ✓ **Système d'équations du premier degré a deux inconnues**
- ✓ **Les polynômes**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE1(15%)**

Exercice01 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$ 2) $3(2x+5)=6x-1$ 3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

4) (2x + 3) ² - (2x + 3) (x - 4) = 0 5) $x^2-100=0$ 6) $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$

7) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ 8) $\frac{4x+2}{x-3}=5$ 9) $x^3-7x=0$

Corrigé : 1) $x+3=-x\sqrt{2}-\sqrt{18}$ Équivaut à : $x+x\sqrt{2}=-3-\sqrt{18}$

Équivaut à $x\left(1+\sqrt{2}\right)=-3-3\sqrt{2}$

Équivaut à : $x=\frac{-3-3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{-3\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}}=-3$ et par suite : $S=\{-3\}$

2) $3(2x+5)=6x-1$ équivaut à $6x+15=6x-1$ équivaut à $6x-6x=-1-15$ équivaut à $0x=-16$

Équivaut à $0=-16$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

Équivaut à $4x-8=6x-2x-8$ équivaut à $4x-4x+8-8=0$

Équivaut à $0=0$ Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\mathbb{R}$

4) (2x + 3) ² - (2x + 3)(x - 4) = 0
Ce qui est équivalent à : (2x + 3)(2x + 3 - x + 4) = 0
Ce qui est équivalent à : (2x + 3)(x + 7) = 0
Les Solutions sont -3/2 ou -7.

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\{-7;-3/2\}$

5) $x^2-100=0$ équivalent à : $x^2-10^2=0$
C'est une identité remarquable de la forme : a² - b² = (a - b) (a + b),
Équivalent à : $(x-10)(x+10)=0$

Équivalent à : $x-10=0$ ou $x+10=0$

Équivalent à : $x=10$ ou $x=-10$ D'où : $S=\{-10;10\}$

6) $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$

Cette équation n'existe pas si $x+2=0$ et si $x-2=0$.
Les valeurs interdites de cette équation sont -2 et 2.
L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

On commence par réduire au même dénominateur les deux fractions.

PROF: ATMANI NAJIB

Le dénominateur commun est : $(x+2)(x-2)$

$\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$ Équivalent à $\frac{3(x-2)-5(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$

Équivalent à $\frac{3x-6-5x-10}{(x+2)(x-2)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{-2x-16}{(x+2)(x-2)}=0$

Donc : $-2x-16=0$ car le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Équivalent à : $x=\frac{16}{-2}=-8$

-8 appartient à l'ensemble de définition de l'équation d'où : $S=\{-8\}$

7) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

Cette équation existe si $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ Équivalent à : $x^2-3^2=0$ équivalent à : $(x+3)(x-3)=0$

Équivalent à $x+3=0$ ou $x-3=0$ équivalent à : $x=-3$ ou $x=3$

Les valeurs interdites de cette équation sont -3 et 3. L'équation est donc définie sur : $D_E=\mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$.

$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ Équivalent à $(x-7)(x+3)=0$ équivalent à $x-7=0$ ou $x+3=0$

Équivalent à $x=7\in D_E$ ou $x=-3\notin D_E$

Donc : $S=\{7\}$

8) $\frac{4x+2}{x-3}=5$ Cette équation n'existe pas si $x-3=0$

$x-3=0$ Équivalent à : $x=3$

La valeur interdite de cette équation est 3. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$\frac{4x+2}{x-3}=5$ Équivalent à : $4x+2=5(x-3)$ équivalent à : $4x+2=5x-15$

Équivalent à : $-x=-17$ équivalent à : $x=17$

Donc : $S=\{17\}$

9) $|7x-10|=|6+3x|$ équivalent à : $7x-10=6+3x$ ou $7x-10=-(6+3x)$

Équivalent à : $4x=16$ ou $10x=4$ équivalent à $x=4$ ou $x=2/5$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est : $S=\{4;2/5\}$

10) $x^3-7x=0$ équivalent à : $x(x^2-7)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-7=0$

Équivalent à $x=0$ ou $x^2=7$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

D'où : $S=\{-\sqrt{7};0;\sqrt{7}\}$

Exercice02 : (Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1|=2$ 2) $|3x+2|=|x-4|$ 3) $3|x+5|=-\frac{1}{2}$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$

Corrigé :1) $|x-1|=2$ Signifie que : $x-1=2$ ou $x-1=-2$

Signifie que : $x=3$ ou $x=-1$ Donc : $S=\{-1;3\}$

2) $|3x+2|=|x-4|$ signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-(x-4)$

Signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-x+4$

Signifie que : $2x=-5$ ou $4x=2$

Signifie que : $x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Donc : $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\}$

3) $3|x+5|=-\frac{1}{2}$ Signifie que : $|x+5|=-\frac{1}{6}$

$S=\varnothing$ Car $|x+5|\geq 0$ et $-\frac{1}{6}<0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$ 0	$+$		$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$ 0	$x-1$		$x-1$
$3-x$	$+$	$+$ 0		$-$
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$ 0		$x-3$
$\|x-1\|+\|3-x\|-3$	$1-2x$	-1		$2x-7$

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq 1$; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

Exercice03 : Soit $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

1) Déterminer une racine évidente de $P(x)$

2) Déterminer alors la factorisation de P.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)>0$

Corrigé :1) Remarque : Pour déterminer des racines évidentes, on peut :
Remplacer l'inconnue par des valeurs entières de x comprises entre −5 et 5 et trouver
Celle(s) qui annule(nt) le polynôme.

On remarque que $P(1)=0$ donc 1 est une racine évidente de $P(x)$.

2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $P(x)=(x-1)Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

PROF: ATMANI NAJIB

On trouve : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-1 \\ c-b=-4 \\ -c=4 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x^2-2^2)=(x-1)(x-2)(x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)>0$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de P(x) > 0 est : $S=]-2,1[\cup]2,+\infty[$

Exercice04 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $|-x+1|\leq 3$ b) $|x-9|\geq\frac{1}{2}$ c) $1\leq|x+1|<2$

Corrigé : a) Résolution de l'inéquation : $|-x+1|\leq 3$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|-x+1|\leq 3$ Signifie que : $-3\leq -x+1\leq 3$

Signifie que : $-3-1\leq -x+1-1\leq 3-1$

Signifie que : $-4\leq -x\leq 2$

Signifie que : $-2\leq x\leq 4$

Donc : $S=[-2;4]$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq\frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq\frac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x\geq\frac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq\frac{19}{2}$ ou $x\leq-\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $1\leq|x+1|<2$

$1\leq|x+1|<2$ Signifie que : $|x+1|<2$ et $|x+1|\geq 1$

• Résolution de l'inéquation : $|x+1|<2$

$|x+1|<2$ Signifie que : $-2<x+1<2$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $-2-1<x+1-1<2-1$
Signifie que : $-3<x<1$
Donc : $S_1=]-3;1[$

• Résolution de l'inéquation : $|x+1|\geq 1$

$|x+1|\geq 1$ Signifie que : $x+1\geq 1$ ou $x+1\leq -1$

Signifie que : $x\geq 0$ ou $x\leq -2$

Donc : $S_2=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=]-3;1[\cap(]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[)$

Donc : $S=]-3;-2]\cup[0;1[$

Exercice05 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$ 2) $\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$

Corrigé : Méthode : Pour résoudre une inéquation du type :
A(x) ≥ B(x) (ou A(x) > B(x) ou A(x) ≤ B(x) ou A(x)
● 1. On déterminer le domaine de définition de l'inéquation
● 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.
● 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

1) $\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$

● 1. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette inéquation est définie si et seulement si $x+2\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$
Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$
● 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{2x+1}{x+2}\geq 3$ Signifie que : $\frac{2x+1}{x+2}-3\geq 0$ Signifie que : $\frac{2x+1}{x+2}-\frac{3(x+2)}{x+2}\geq 0$

Signifie que : $\frac{2x+1-3x-6}{x+2}\geq 0$ Signifie que : $\boxed{\frac{-x-5}{x+2}\geq 0}$

● 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.
$-x-5=0$ Équivaut à : $x=-5$ et $x+2=0$ qui signifie que : $x=-2$
Remarque : - 2 est une valeur interdite car elle annule le dénominateur $x+2$

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{-x-5}{x+2}\geq 0$

Donc : $S=[-5,-2[$

2) $\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$

● 1. On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $2x-1 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq 0$ ou $x \neq \frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

● 2. On se ramène à une comparaison à zéro et on factorise.

$\frac{1}{x} < \frac{1}{2x-1}$ Signifie que : $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < 0$ Signifie que : $\frac{2x-1}{x(2x-1)} - \frac{x}{x(2x-1)} < 0$

Signifie que : $\frac{2x-1-x}{x(2x-1)} < 0$ Signifie que : $\boxed{\frac{x-1}{x(2x-1)} < 0}$

● 3. On fait un tableau de signes et on donne le résultat sous forme d'intervalle.

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$ et $2x-1=0$ qui signifie que : $x = \frac{1}{2}$

Remarque : 0 et $\frac{1}{2}$ sont des valeurs interdites car elle annule les dénominateurs x et $2x-1$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x(2x-1)}$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $\frac{x-1}{x(2x-1)} < 0$

Donc : $S = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

Exercice06 : A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivante : $2x^2 - 3x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ b) $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ c) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ d) $2x^3 - 3x^2 = 2x$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2 + x - 6 = 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $(E): x^2 - |x-2| - 4 = 0$

Corrigé : A)1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$: a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : Δ = b² – 4ac = (-3)² – 4 x 2 x (-2) = 25.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$ Donc : $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

2) 2) $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ avec $x \geq 0$

$2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ Equivalent à : $2\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ car $\sqrt{x}^2 = x$

Faisons un changement de variable en posant : $X = \sqrt{x}$
Nous obtenons l'équation : $2X^2 - 3X - 2 = 0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 2$

Equivalent à : $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x} = 2$

Mais l'équation : $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x} = 2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = 2^2$ c'est-à-dire : $x = 4$ et par suite : $S = \{4\}$.

2) b) $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ Equivalent à : $2|x|^2 - 3|x| - 2 = 0$ car $|x|^2 = x^2$
Faisons un changement de variable en posant : $X = |x|$ nous obtenons l'équation :
$2X^2 - 3X - 2 = 0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 2$ qui est équivalent à : $|x| = -\frac{1}{2}$ ou $|x| = 2$

Mais l'équation : $|x| = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x| = 2$ Signifie : $x = 2$ ou $x = -2$ par suite : $S = \{-1;1\}$

2) c) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2 - 3x^2 - 2 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$ nous obtenons donc : l'équation :
$2X^2 - 3X - 2 = 0$
Donc : d'après A) 1) on a : $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 2$ et par suite : $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 2$

Mais l'équation : $x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2 = 2$ Signifie : $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ par suite : $S = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3 - 3x^2 = 2x$ Equivalent à : $2x^3 - 3x^2 - 2x = 0$
Equivalent à : $x\left(2x^2 - 3x - 2\right) = 0$

Equivalent à : $x = 0$ ou $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Equivalent à : $x = 0$ ou $x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = 2$ et par suite : $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : $x^2 + x - 6 = 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$
Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$: a = 1, b = 1 et c = - 6
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 2$ Donc : $S = \{-3; 2\}$
Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$: a = 1, b = -1 et c = - 2
Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$ Donc : $S = \{-1; 2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : $(E): x^2 - |x-2| - 4 = 0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x \geq 2$ alors $x-2 \geq 0$ donc : $|x-2| = x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2 - (x-2) - 4 = 0$

Signifie : $x^2 - x + 2 - 4 = 0$ c'est-à-dire : $x^2 - x - 2 = 0$

Or : d'après B) 1) $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$ mais : $x_1 = -1 \notin [2;+\infty[$ donc : $S_1 = \{2\}$

Si $x \prec 2$ alors $x-2 \leq 0$ donc : $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2 + (x-2) - 4 = 0$ c'est à dire : $x^2 + x - 2 - 4 = 0$

Signifie : $x^2 + x - 6 = 0$ Or : d'après B) 1) $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$

Mais : $x_2 = 2 \notin]-\infty;2[$ Donc : $S_2 = \{-3\}$

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \{-3;2\}$.

Exercice07 : Soit le trinôme (E) : $P(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) $a = -3$: et et $b = \sqrt{3}$ et $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{3}^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 3 + 36 = 39$$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha + \beta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha \times \beta = \frac{3}{-3} = -1$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ donc $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2(-1) = \frac{3}{9} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} = -\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice08 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}(x^2-3x+1)+(y^2-5y+4)=-3\\2(x^2-3x+1)-3(y^2-5y+4)=4\end{cases}$

Solution : On pose : $X=x^2-3x+1$ e $Y=y^2-5y+4$ t

Le système devient : $\begin{cases}X+Y=-3\\2X-3Y=4\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=-1$ et $Y=-2$

Donc : $x^2-3x+1=-1$ et $y^2-5y+4=-2$ c'est-à-dire : $x^2-3x+21=0$ et $y^2-5y+6=0$

On résolve l'équation : $x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$

Donc : $x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3}{2}$

On résolve l'équation $y^2-5y+6=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

Donc **:** $y_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ et $y_2=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$ par suite on a : $S=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$

Exercice09 : Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x)\leq0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$: $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}$

$P(-1)=0$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$

$$=P(x)$$

3) a) $\Delta=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times1\times\sqrt{2}+1-4\times1\times\sqrt{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$: $\quad Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$ car : $\sqrt{2}-1>0$

On a $\Delta\succ0$ donc : $x_1=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Par suite: $S=\left\{\sqrt{2};1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{2}^2$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c'est à dire : $x=2$ et $x=1$ par suite : $S=\{1;2\}$.

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$:

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=1$ On a donc : $S=\left\{-1;1;\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq0$

$P(x)\leq0$ Signifie que : $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$			$+$			$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$

Exercice10 : 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) $x_1=-6\pi$ b) $x_2=\dfrac{31\pi}{3}$ c) $x_3=\dfrac{-23\pi}{6}$ d) $x_4=\dfrac{127\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$; $C(x_3)$; $D(x_4)$

Solution :1)a) $x_1=-6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1=-6\pi$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x_1=2k\pi$ c a d $\alpha=-6\pi+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<-6\pi+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+6\pi<2k\pi\leq\pi+6\pi$

Équivalent à : $5\pi<2k\pi\leq7\pi$

Équivalent à : $5<2k\leq7$

Équivalent à : $\frac{5}{2} < k \le \frac{7}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 3$ et donc $\alpha = -6\pi + 2\times 3\pi = -6\pi + 6\pi = 0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$ est $\alpha = 0$

b) $x_2 = \frac{31\pi}{3}$

Methode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_2 = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{31\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{31\pi}{3} < 2k\pi \le \pi - \frac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34\pi}{3} < 2k\pi \le -\frac{28\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34}{3} < 2k \le -\frac{28}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\frac{17}{3} < k \le -\frac{14}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-5{,}6 < k \le -4{,}6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -5$ et donc : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi = \frac{31\pi}{3} + 2(-5)\pi = \frac{31\pi}{3} - 10\pi = \frac{31\pi - 30\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Methode2 : $x_2 = \frac{31\pi}{3} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq 10{,}3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10\times 3 = 30$

On a $\frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi + \pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{\pi}{3} + 5\times 2\pi$ et $\frac{\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $x_3 = \frac{-23\pi}{6} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 23 par 6 on trouve $\simeq 3{,}8$ on prend le nombre entier proche ex : 4 et $6\times 4 = 24$

On a $\frac{-23\pi}{6} = \frac{-24\pi + \pi}{6} = \frac{-24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 4\pi = \frac{\pi}{6} + (-2)\times 2\pi$ et $\frac{\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_3 = \frac{-23\pi}{6}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{6}$

d) $x_4 = \frac{127\pi}{4} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

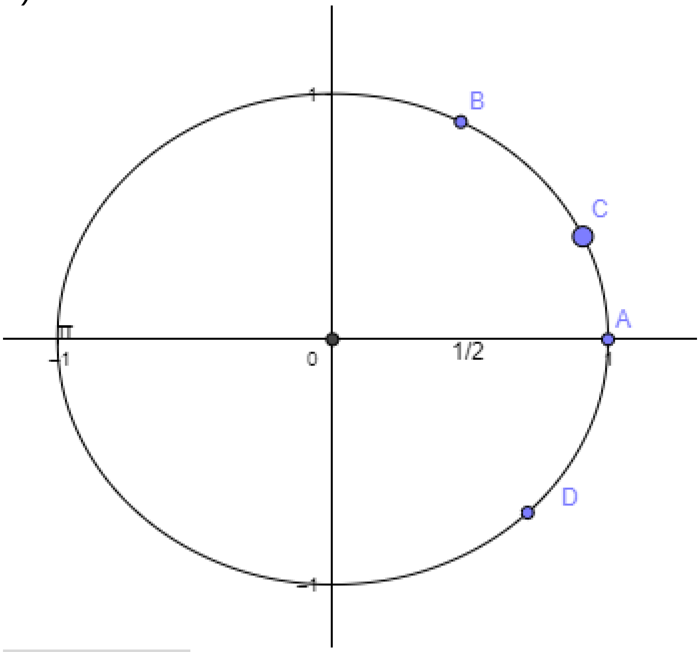
On divise 127 par 4 on trouve $\simeq 31{,}7$ on prend le nombre entier proche ex : 32 et $32\times 4 = 128$

On a $\frac{127\pi}{4} = \frac{128\pi - \pi}{4} = \frac{128\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 32\pi = -\frac{\pi}{4} + 16\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_4 = \frac{127\pi}{4}$ est : $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

PROF: ATMANI NAJIB

2)



Exercice11 : (**) On a : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $(\cos x)^2 + \frac{16}{25} = 1$

Donc $(\cos x)^2 = 1 - \frac{16}{25}$ c'est à dire **:** $(\cos x)^2 = \frac{9}{25}$

Donc : $\cos x = \sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x \geq 0$ et par suite : $\cos x = \frac{3}{5}$

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB