

**Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2
sur les leçons suivantes :**

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : Soient $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}^*$ tels que : $ab+bc+ca=0$

Calculer : $B = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$

Corrigé : $B = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = \frac{ab(a+b)}{abc} + \frac{ac(a+c)}{abc} + \frac{bc(b+c)}{abc}$

$$B = \frac{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2}{abc}$$

$$B = \frac{(a^2b + a^2)c + (ab^2 + b^2c) + (ac^2 + bc^2)}{abc}$$

$$B = \frac{a(ab+ac) + b(ab+bc) + c(ac+bc)}{abc}$$

Or on a : $ab+bc+ca=0$ donc $ab+ca=-bc$ et $ab+bc=-ca$ et $ac+bc=-ab$

$$\text{Donc : } B = \frac{a(-bc) + b(-ca) + c(-ab)}{abc} = \frac{-abc - abc - abc}{abc} = \frac{-3abc}{abc} = -3$$

Exercice02 : Effectuer et Calculer et simplifier :

$$A = (3 + \sqrt{11})^2 - (3 - \sqrt{11})^2 \quad B = (4\sqrt{3} - 7)^{2015} \times (4\sqrt{3} + 7)^{2015}$$

$$C = \frac{3 \times 10^{-5} \times 7,2 \times 10^7}{2 \times 15^3} \quad D = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}}$$

$$F = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

Corrigé : $A = (\sqrt{3} + \sqrt{11})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{11})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2 - ((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2)$

$$A = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - (3 - 2\sqrt{33} + 11) = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - 3 + 2\sqrt{33} - 11 = 4\sqrt{33}$$

$$B = ((4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7))^{2015} = ((4\sqrt{3})^2 - (7)^2)^{2015} = (48 - 49)^{2015} = (-1)^{2015} = -1$$

$$C = \frac{3 \times 10^{-5} \times 7,2 \times 10^7}{2 \times 15^3} = \frac{3 \times 10^{-5} \times 3^2 \times 2^3 \times 10^{-1} \times 10^7}{2 \times (3 \times 5)^3} = \frac{3 \times 3^2 \times 2^3 \times 10}{2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 3^2 \times 2^3 \times 2 \times 5}{2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$$

$$D = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}} = \frac{-2^3 \times 4^{2 \times (-1)} \times 2^3}{1024 \times (-2^3)^{-4}} = \frac{-2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3}{2^{10} \times (-2^3)^{-4}}$$

$$D = -2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3 \times 2^{-10} \times (-2)^{3 \times 4} = -2^{3-4+3-10+12} = -2^4 = -16$$

$$F = (200520052006)^2 - (200520052005 \times 200520052007)$$

On pose : $x = 200520052006$ donc : $200520052007 = x + 1$ et $200520052005 = x - 1$

$$\text{Donc : } F = x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

Exercice03 : On pose : $A = \sqrt{(52 - 6\sqrt{43})^3}$ et $B = \sqrt{(52 + 6\sqrt{43})^3}$

1) Montrer que : $A = (\sqrt{43} - 3)^3$ et $B = (\sqrt{43} + 3)^3$

2) En déduire que : $A - B \in \mathbb{Z}$.

Corrigé : 1) Montrons que $A = (\sqrt{43} - 3)^3$

$$A = \sqrt{(52 - 6\sqrt{43})^3} = \sqrt{(43 - 2 \times 3\sqrt{43} + 9)^3} = \sqrt{(\sqrt{43}^2 - 2 \times 3\sqrt{43} + 3^2)^3}$$

$$A = \sqrt{\left((\sqrt{43} - 3)^2\right)^3} = \sqrt{\left((\sqrt{43} - 3)^2\right)^3} = |\sqrt{43} - 3|^3 = (\sqrt{43} - 3)^3 \text{ en effet : } |\sqrt{43} - 3| = \sqrt{43} - 3 \text{ car } \sqrt{43} > 3$$

$$B = \sqrt{(52 + 6\sqrt{43})^3} = \sqrt{(43 + 2 \times 3\sqrt{43} + 9)^3} = \sqrt{(\sqrt{43}^2 + 2 \times 3\sqrt{43} + 3^2)^3}$$

$$B = \sqrt{\left((\sqrt{43} + 3)^2\right)^3} = \sqrt{\left((\sqrt{43} + 3)^2\right)^3} = |\sqrt{43} + 3|^3 = (\sqrt{43} + 3)^3$$

2) $A - B = (\sqrt{43} - 3)^3 - (\sqrt{43} + 3)^3$ mais on a : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\text{Donc : } A - B = (\sqrt{43} - 3 - \sqrt{43} - 3) \left((\sqrt{43} - 3)^2 + (\sqrt{43} - 3)(\sqrt{43} + 3) + (\sqrt{43} + 3)^2 \right)$$

$$\text{Donc : } A - B = -6(43 - 6\sqrt{43} + 9 + 43 - 9 + 43 + 6\sqrt{43} + 9)$$

$$\text{Donc : } A - B = -6 \times 138 = -828 \in \mathbb{Z}$$

Exercice04 : $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2 - x + y^2 - x(3 - y^2) + y(x^2 - y) \quad ; \quad B = 4(\sqrt{2} - 3) - \sqrt{5}(\sqrt{10} - 5)$$

$$C = (2x - 3)^3 \quad ; \quad D = (x + 1)(2 - x) - [(1 - x)(x + 3) - 5x - 4]$$

$$E = (2x - 3)(2x + 3) - (3x + 1)^2$$

Corrigé : $A = 2 - x + y^2 - x(3 - y^2) + y(x^2 - y)$

$$A = 2 - x + y^2 - 3x + xy^2 + x^2y - y^2$$

$$A = 2 - 4x + xy^2 + x^2y$$

$$B = 4(\sqrt{2} - 3) - \sqrt{5}(\sqrt{10} - 5) = 4\sqrt{2} - 12 - \sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$$

$$B = 4\sqrt{2} - 12 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{2} - 12$$

$$C = (2x)^3 - 3(2x)^2 \times 3 + 3(2x) \times 3^2 - 3^3$$

$$C = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

$$D = (x + 1)(2 - x) - [(1 - x)(x + 3) - 5x - 4]$$

$$D = 2x - x^2 + 2 - x - (x + 3 - x^2 - 3x - 5x - 4)$$

$$D = -x^2 + x + 2 + x^2 + 7x + 1$$

$$\text{Donc : } D = 8x + 3$$

$$E = (2x - 3)(2x + 3) - (3x + 1)^2$$

$$E = (2x)^2 - 3^2 - ((3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2)$$

$$E = 4x^2 - 9 - (9x^2 + 6x + 1) = 4x^2 - 9 - 9x^2 - 6x - 1 = -5x^2 - 6x - 10$$

Exercice05 : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$A = 4x^3 - 20x^2 + 25x ; B = x^2 + 12x + 36 ; C = 100x^3 - 3x ;$$

$$D = (4x^2 - 100)(x - 2) + (-6x + 30)(x - 1)$$

$$E = 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 ; F = (7x - 1)(3x - 5) + 25x - 9x^3 ; G = (14x - 21)(3x - 1) + (15 - 10x)(x - 11)$$

$$H = 9x^9 - 6x^5 + x ; P = 64x^3 - 1 + x(4x - 1) ; Q = 125x^3 - 1 - 2(25x^2 - 1) - 3(-5x + 1)$$

$$R = x^6 + x^4 - 2x^2 - 2 ; L = x^4 - 36$$

Corrigé : $A = 4x^3 - 20x^2 + 25x = 4x \times x^2 - 20x \times x + 25x$ donc x facteur commun

$$\text{Donc : } A = x(4x^2 - 20x + 25)$$

$$A = x((2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2) = x(2x - 5)^2$$

$$B = x^2 + 12x + 36 \text{ est du type : } a^2 + 2ab + b^2$$

$$B = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = (x + 6)^2$$

$$C = 100x^3 - 3x = x(100x^2 - 3) = x((10x)^2 - \sqrt{3}^2) \text{ est du type : } a^2 - b^2$$

$$C = x(10x - \sqrt{3})(10x + \sqrt{3})$$

$$D = (4x^2 - 100)(x - 2) + (-6x + 30)(x - 1)$$

$$D = ((2x)^2 - 10^2)(x - 2) - 3(2x - 10)(x - 1)$$

$$D = (2x + 10)(2x - 10)(x - 2) - 3(2x - 10)(x - 1) \text{ On a : } 2x - 10 \text{ facteur commun}$$

$$\text{Donc : } D = (2x - 10)[(2x + 10)(x - 2) - 3(x - 1)] = (2x - 10)(2x^2 - 4x + 10x - 20 - 3x + 3)$$

$$D = (2x - 10)(2x^2 + 3x - 17)$$

$$E = 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 \text{ est du type : } a^2 - 2ab + b^2$$

$$E = (\sqrt{2}x)^2 - 2 \times \sqrt{2}x \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})^2$$

$$F = (7x - 1)(3x - 5) + 25x - 9x^3$$

$$F = (7x - 1)(3x - 5) - x(9x^2 - 25) = (7x - 1)(3x - 5) - x((3x)^2 - 5^2) \text{ mais } (3x)^2 - 5^2 \text{ est du type : } a^2 - b^2$$

$$\text{Donc : } F = (7x - 1)(3x - 5) - x(3x - 5)(3x + 5) \text{ On a : } 3x - 5 \text{ facteur commun}$$

$$\text{Donc : } F = (3x - 5)[(7x - 1) - x(3x + 5)] = (3x - 5)(7x - 1 - 3x^2 - 5x) = (3x - 5)(-3x^2 + 2x - 1)$$

$$G = (14x - 21)(3x - 1) + (15 - 10x)(x - 11)$$

$$G = 7(2x - 3)(3x - 1) - 5(2x - 3)(x - 11) \text{ On a : } 2x - 3 \text{ facteur commun}$$

$$\text{Donc : } G = (2x - 3)[7(3x - 1) - 5(x - 11)] = (2x - 3)(21x - 7 - 5x + 55) = (2x - 3)(16x + 48)$$

$$H = 9x^9 - 6x^5 + x = x(9x^8 - 6x^4 + 1)$$

$$H = x((3x^4)^2 - 2 \times 3x^4 \times 1 + 1^2) \text{ est du type : } a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Donc : } H = x(3x^4 - 1)^2$$

$$P = 64x^3 - 1 + x(4x - 1) = (4x)^3 - 1^3 + x(4x - 1) \text{ On a : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Donc : } P = (4x - 1)((4x)^2 + 4x + 1^2) + x(4x - 1)$$

$$\text{Donc : } P = (4x-1)(16x^2 + 4x + 1 + x) = (4x-1)(16x^2 + 5x + 1)$$

$$Q = 125x^3 + 1 - 2(25x^2 - 1) + 3(-5x - 1)$$

$$Q = (5x)^3 + 1^3 - 2((5x)^2 - 1^2) - 3(5x + 1) \text{ et on a : } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab - b^2) \text{ et}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{Donc : } Q = (5x+1)((5x)^2 + 5x + 1^2) - 2(5x+1)(5x-1) - 3(5x+1) \text{ On a : } 5x+1 \text{ facteur commun}$$

$$\text{Donc : } Q = (5x+1)[(25x^2 + 5x + 1) - 2(5x-1) - 3]$$

$$\text{Donc : } Q = (5x+1)(25x^2 + 5x + 1 - 10x + 2 - 3)$$

$$\text{Donc : } Q = (5x+1)(25x^2 - 5x) = 5x(5x+1)(x-1)$$

$$R = x^6 + x^4 - 2x^2 - 2$$

$$R = (x^6 + x^4) - 2(x^2 + 1)$$

$$R = x^4(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1)$$

$$R = x^4(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) \text{ On a : } x^2 + 1 \text{ facteur commun}$$

$$R = (x^2 + 1)(x^4 - 2) \text{ on peut aussi continuer la factorisation}$$

$$R = (x^2 + 1)((x^2)^2 - \sqrt{2}^2) = (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{2}^2)(x^2 + \sqrt{2})$$

$$R = (x^2 + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$$

$$L = x^4 - 36 = x^4 - (\sqrt{6})^4 = (x^2)^2 - (\sqrt{6}^2)^2$$

$$L = (x^2 - \sqrt{6}^2)(x^2 + \sqrt{6}^2) = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x^2 + 6)$$

Exercice06 : $n \in \mathbb{N}^*$

$$1) \text{ Déterminer les nombres } a \text{ et } b \text{ tels que : } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

$$2) \text{ En déduire la valeur du nombre : } A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{2020 \times 2021}$$

Corrigé : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

$$\text{Équivaux a : } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)}$$

$$\text{Équivaux a : } a(n+1) + bn = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Pour : } n=1 \text{ on a : } 2a + b = 1$$

$$\text{Pour : } n=2 \text{ on a : } 3a + 2b = 1$$

$$\text{On va donc résoudre le système suivant : } \begin{cases} 2a + b = 1 & (1) \\ 3a + 2b = 1 & (2) \end{cases}$$

Par exemple Par la Méthode de substitution : On exprime b en fonction de a dans la première

$$\text{équation et on obtient le système équivalent : } \begin{cases} b = 1 - 2a \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \text{ On remplace ensuite } b \text{ par } 1 - 2a \text{ dans}$$

la seconde équation, ce qui donne le système : $\begin{cases} b=1-2a \\ 3a+2(1-2a)=1 \end{cases}$ Qui équivaut à $\begin{cases} b=1-2a \\ -a+2=1 \end{cases}$

Soit encore à $\begin{cases} b=1-2a \\ a=1 \end{cases}$ et on remplace a par 1 dans la première équation on trouve $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

Par suite : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) D'après la question précédente on a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $n=1: \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$

$n=2: \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$n=3: \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Ainsi de suite...

$n=2020: \frac{1}{2020 \times 2021} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$

Donc : $A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{2020 \times 2021} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}$

En simplifiant avec les nombres opposés on trouve : $A = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2021-1}{2021} = \frac{2020}{2021}$

Exercice07 : Soient : a ; b deux réels distincts et strictement positifs.

Comparer les nombres x et y dans chacun des cas suivants :

1) $x = \frac{2a+1}{a}$ et $y = \frac{a}{2a+1}$ 2) $x = \frac{a^2+b^2}{ab}$ et $y = 2$ 3) $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $y = \frac{2}{a+b}$

4) $x = (2a-1)(3b-5)$ et $y = 6ab+5$

Corrigé : Soient $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$

1) Comparons : $x = \frac{2a+1}{a}$ et $y = \frac{a}{2a+1}$

On a : $x - y = \frac{2a+1}{a} - \frac{a}{2a+1} = \frac{(2a+1)^2 - a^2}{a(2a+1)} = \frac{(2a+1-a)(2a+1+a)}{a(2a+1)} = \frac{(a+1)(3a+1)}{a(2a+1)}$

Or : $a \in \mathbb{R}^{**}$ donc : $\frac{(a+1)(3a+1)}{a(2a+1)} > 0$

Par suite : $x - y > 0$

Donc : $x > y$

2) Comparons : $x = \frac{a^2+b^2}{ab}$ et $y = 2$

On a : $x - y = \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$

Or : $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ donc : $ab > 0$ et $(a-b)^2 \geq 0$

Par suite : $x - y \geq 0$

Donc : $x \geq y$

3) Comparons : $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $y = \frac{2}{a+b}$

$$\text{On a : } x - y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{a+b} = \frac{a+b}{ab} - \frac{2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}{ab(a+b)}$$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}$$

Or : $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ donc : $ab > 0$ et $a^2 + b^2 > 0$ et $a+b > 0$

Par suite : $x - y > 0$

Donc : $x > y$

4) Comparons : $x = (2a-1)(3b-5)$ et $y = 6ab+5$

$$\text{On a : } x - y = (2a-1)(3b-5) - (6ab+5)$$

$$\text{Donc : } x - y = 6ab - 10a - 3b + 5 - 6ab - 5$$

$$\text{Donc : } x - y = -10a - 3b = -(10a+3b)$$

Or : $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ donc : $10a+3b > 0$ et donc : $-(10a+3b) < 0$

Par suite : $x - y < 0$ et donc : $x < y$

Exercice08 : Sachant que : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près

Et 2,25 est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près

1) Donner un encadrement des réels a et b

2) Donner un encadrement des réels suivants a) $a+b$ b) $a-b$ c) $A = \frac{a+1}{a^2+a+2}$

Correction : 1) a) On a : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près donc : $\left| a - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3}$

$$\left| a - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3} \text{ Signifie que : } -\frac{2}{3} < a - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

$$\text{Signifie que : } -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} < a - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Signifie que : } \boxed{-\frac{1}{3} < a < 1}$$

b) 2,25 est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près donc : $|b - 2,25| < 5 \times 10^{-2}$

$$|b - 2,25| < 5 \times 10^{-2} \text{ Signifie que : } -5 \times 10^{-2} < b - 2,25 < 5 \times 10^{-2}$$

$$\text{Signifie que : } -5 \times 10^{-2} + 2,25 < b < 5 \times 10^{-2} + 2,25$$

$$\text{Signifie que : } \boxed{2,2 < b < 2,3}$$

2)a) On a : $-\frac{1}{3} < a < 1$ et $2,2 < b < 2,3$ donc : $-\frac{1}{3} + 2,2 < a+b < 1+2,3$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{3} + 2,2 < a+b < 1+2,3$$

$$\text{Donc : } \frac{5,6}{3} < a+b < 3,3$$

$$\text{Donc : } \frac{56}{30} < a+b < 3,3 \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\frac{28}{15} < a+b < 3,3}$$

2)b) On a : $a-b = a+(-b)$ et $-\frac{1}{3} < a < 1$ et $2,2 < b < 2,3$ donc : $-2,3 < -b < -2,2$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{3} + (-2,3) < a+(-b) < 1+(-2,2)$$

$$\text{Donc : } \frac{-7,9}{3} < a - b < -1,2$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{-79}{30} < a - b < -1,2}$$

$$\text{c) } A = (a+1) \times \frac{1}{a^2 + a + 2}$$

$$\text{On a : } -\frac{1}{3} < a < 1 \quad \text{donc : } -\frac{1}{3} + 1 < a + 1 < 1 + 1$$

$$\text{Donc : } \frac{2}{3} < a + 1 < 2$$

$$\text{On a : } \text{donc : } 0 \leq a < 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 0$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq -a \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq a^2 \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{Donc : } \boxed{0 \leq a^2 < 1} \quad \text{et on a : } -\frac{1}{3} + 2 < a + 2 < 1 + 2$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{et on a : } \frac{5}{3} < a + 2 < 3$$

$$\text{Donc : } \frac{5}{3} \leq a^2 + a + 2 < 4$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a^2 + a + 2} < \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < a + 1 < 2$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \leq (a+1) \times \frac{1}{a^2 + a + 2} < \frac{3}{5} \times 2$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{6} \leq A < \frac{6}{5}}$$

Exercice 09 : Traduire chacune des inégalités suivantes ou encadrements par l'appartenance à un intervalle qui convient :

$$1) x \geq -3 \quad 2) x < 5 \quad 3) 1 \leq 2x \leq 4 \quad 4) 0 < 6x - 2 \leq 10 \quad 5) -8 \leq 2 - 2x \leq 6$$

$$6) x > -2 \text{ et } x \leq 2 \quad 7) x \leq 0 \text{ ou } x > 0 \quad 8) x > 1 \text{ et } x \leq 0 \quad 9) |x - 2| < 1$$

$$10) |x + 1| \geq 2 \quad 11) 1 < |x - 1| < 2$$

Corrigé : 1) $x \geq -3$ Équivaut à : $x \in [-3, +\infty[$.

2) $x < 5$ Équivaut à : $x \in]-\infty, 5[$.

3) $1 \leq 2x \leq 4$ équivaut à : $\frac{1}{2} \times 1 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq 4 \times \frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ équivaut à : $0 + 2 < 6x - 2 + 2 \leq 10 + 2$ équivaut à : $2 < 6x \leq 12$

Équivaut à : $2 \times \frac{1}{2} < 6x \times \frac{1}{2} \leq 12 \times \frac{1}{2}$ c'est à dire : $1 < 3x \leq 6$

Équivaut à : $1 \times \frac{1}{3} < 3x \times \frac{1}{3} \leq 6 \times \frac{1}{3}$

Équivaut à : $\frac{1}{3} < x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left]\frac{1}{3}, 2\right]$

5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$ Équivaut à : $-8 - 2 \leq 2 - 2x - 2 \leq 6 - 2$

Équivaut à : $-10 \leq -2x \leq 4$ 2quivaut à : $-10 \times \frac{1}{2} \leq -2x \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2}$

Équivaut à : $-5 \leq -x \leq 2$ c'est à dire : $x \in [-2, 5]$ Équivaut $-2 \leq x \leq 5$

6) $x > -2$ et $x \leq 2$

Signifie que : $x \in]-2; +\infty[$ et $x \in]-\infty, 2]$

Signifie que : $x \in]-2; +\infty[\cap]-\infty, 2]$

Signifie que : $x \in]-2; 2]$

7) $x \leq 0$ ou $x > 0$ signifie : $x \in]-\infty, 0]$ ou $x \in]0; +\infty[$ Signifie que : $x \in]-\infty, 0] \cup]0; +\infty[$

Par suite : $x \in \mathbb{R}$

8) $x > 1$ et $x \leq 0$ signifie : $x \in]1; +\infty[$ et $x \in]-\infty, 0]$ Signifie que : $x \in]-\infty, 0] \cap]1; +\infty[$

Par suite : $x \in \emptyset$

9) $|x - 2| < 1$ signifie $-1 < x - 2 < 1$

C'est-à-dire : $-1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$

Signifie $1 < x < 3$ c'est-à-dire que : $x \in]1; 3[$

10) $|x + 1| \geq 2$ signifie $x + 1 \geq 2$ ou $x + 1 \leq -2$

Signifie que : $x \geq 1$ ou $x \leq -3$

Par suite : $x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

11) $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ \text{et} \\ x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -2 < x - 1 < 2 \\ \text{et} \\ x - 1 < -1 \text{ ou } x - 1 > 1 \end{cases}$ Signifie : $\begin{cases} |x - 1| < 2 \\ |x - 1| > 1 \end{cases}$ Signifie $1 < |x - 1| < 2$

C'est-à-dire que : $x \in]-1; 3[\cap (]-\infty; 0[\cup]2; +\infty])$

C'est-à-dire que : $x \in]-1; 3[\cap]-\infty; 0[\cup]-1; 3[\cap]2; +\infty]$

Signifie $x \in]-1; 0[\cup]2; 3[$

Exercice 10 : 1) Simplifier : $E = \sqrt{\frac{1}{(3 - \sqrt{10})^2}} - \sqrt{\frac{1}{(3 + \sqrt{10})^2}}$

2) Soient x et y deux réels tels que : $3 < x < y$

Simplifier : $F = \sqrt{(x - y)^2} + \sqrt{(3 - x)^2} - |y - 2|$

3) Soient x et y deux réels tels que : $x \in]-2; 5[$ et $y \in]-3; -1[$

Simplifier : $G = 2|2x + 7| - |3y| + 2|y + 8| - |2y - x|$

Corrigé : 1) Simplifions : $E = \sqrt{\frac{1}{(3 - \sqrt{10})^2}} - \sqrt{\frac{1}{(3 + \sqrt{10})^2}}$

$$E = \sqrt{\left(\frac{1}{3 - \sqrt{10}}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{3 + \sqrt{10}}\right)^2} = \left|\frac{1}{3 - \sqrt{10}}\right| - \left|\frac{1}{3 + \sqrt{10}}\right| = \frac{1}{|3 - \sqrt{10}|} - \frac{1}{|3 + \sqrt{10}|}$$

$$E = \frac{1}{-(3 - \sqrt{10})} - \frac{1}{3 + \sqrt{10}} \text{ Car : } 3 - \sqrt{10} < 0 \text{ (} 3^2 = 9 \text{ ; } \sqrt{10}^2 = 10 \text{)} \text{ et } 3 + \sqrt{10} > 0$$

$$E = \frac{-1}{3 - \sqrt{10}} - \frac{1}{3 + \sqrt{10}} = \frac{-(3 + \sqrt{10}) - (3 - \sqrt{10})}{(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})} = \frac{-6}{3^2 - \sqrt{10}^2} = \frac{-6}{9 - 10} = 6$$

1) Simplifions : $F = \sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(3-x)^2} - |y-2|$

Soient x et y deux réels tels que : $3 < x < y$

$$F = \sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{(3-x)^2} - |y-2| = |x-y| + |3-x| - |y-2|$$

On a : $3 < x < y$ alors $x < y$ et donc : $x-y < 0$

On a : $3 < x < y$ alors $3 < x$ et donc : $3-x < 0$

On a : $3 < x < y$ et $2 < 3$ et donc : $2 < 3 < x < y$ et donc : $2 < y$ et alors : $y-2 > 0$

$$\text{Donc : } F = -(x-y) - (3-x) - (y-2)$$

$$\text{Donc : } F = -x + y - 3 + x - y + 2 \quad \text{Alors : } \boxed{F = -1}$$

3) Simplifions : $G = 2|2x+7| - |3y| + 2|y+8| - |2y-x|$

Soient x et y deux réels tels que : $x \in]-2; 5[$ et $y \in]-3; -1[$

On a : $x \in]-2; 5[$ donc : $-2 < x < 5$ et donc : $-4 < 2x < 10$ et par suite : $3 < 2x+7 < 17$

Donc : $0 < 2x+7$ et alors : $|2x+7| = 2x+7$: (1)

On a : $y \in]-3; -1[$ donc : $-3 < y < -1$ et donc : $-9 < 3y < -3$ par suite : $3y < 0$

Et alors : $|3y| = -3y$: (2)

On a : $-3 < y < -1$ donc : $5 < y+8 < 7$ par suite : $0 < y+8$ et alors : $|y+8| = y+8$: (3)

On a : $-2 < x < 5$ donc : $-5 < -x < 2$ et $-6 < 2y < -2$ et on a : $2y-x = 2y+(-x)$

Donc : $-6+(-5) < 2y-x < -2+2$

Donc : $-11 < 2y-x < 0$ par suite : $|2y-x| = -(2y-x) = -2y+x$: (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $G = 2(2x+7) + 3y + 2(y+8) + 2y-x$

Donc : $G = 4x+14+3y+2y+16+2y-x$ c'est-à-dire : $G = 3x+7y+30$

Exercice11 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et Soient les points $A(-1,2)$;

$B(3,1)$ et les droites : $(D_1): 2x+8y+2=0$ et $(D_2): x-y-2=0$

1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection $H(x; y)$

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) Qui passe par le point $C(3,-1)$ et parallèle à (D_2)

Solution : 1) On a : $2 \times (-1) - 8 \times 1 = -10 \neq 0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système :

$$\begin{cases} 2x+8y+2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

On utilise la méthode des déterminants par exemple pour résoudre ce système : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$$\text{Donc : } x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{3}{5} \quad \text{Alors : le point d'intersection est } H\left(\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

2) la droite (AB) a une équation de la forme : (AB) : $ax + by + c = 0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(4, -1)$ $\overrightarrow{AB}(-b, a)$

Donc : $a = -1$ et $-b = 4$ donc $b = -4$ et l'équation devient : $-1x - 4y + c = 0$

On a : $A \in (AB)$ donc : $1 - 8 + c = 0$ c'est-à-dire : $c = 7$

Donc : (AB) $x + 4y - 7 = 0$

3) (D_1) : $2x + 8y + 2 = 0$ et (AB) $x + 4y - 7 = 0$

Et on a : $2 \times 4 - 8 \times 1 = 0$ Donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèle (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(1, 1)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(3, -1)$

Donc : $(\Delta) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

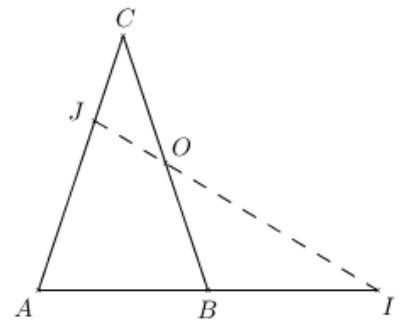
Exercice 12 : À partir du triangle ABC on construit les points I ; J tel que :

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

1) Déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; I ; J dans le repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ)

3) Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment [BC]



Solution : 1) En considérant le repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a $A(0; 0)$

On a $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc $B(1; 0)$ et on a $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ donc $C(0; 1)$

On a : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc : $I(2; 0)$ dans le repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $J(0; \frac{2}{3})$ dans le repère : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2) (IJ) : $ax + by + c = 0$

On a : $\overrightarrow{IJ}(-2; \frac{2}{3})$ un vecteur directeur de (IJ) est $\overrightarrow{IJ}(-b; a)$ donc : $a = \frac{2}{3}$ et $b = 2$

Par suite l'équation devient (IJ) : $\frac{2}{3}x + 2y + c = 0$.

Or on sait que : $I(2; 0) \in (IJ)$ donc : $\frac{2}{3} \times (2) + 2 \times 0 + c = 0$ c'est-à-dire : $c = -\frac{4}{3}$

Par suite (IJ) : $\frac{2}{3}x + 2y - \frac{4}{3} = 0$

On multiplie cette équation par : 3 on trouve (IJ) : $2x + 6y - 4 = 0$

3) Démontrons que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment [BC]

Le milieu O du segment $[BC]$ est $O\left(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ et on a : $B(1;0)$ et $C(0;1)$

Donc : $O\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ c'est-à-dire : $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Regardons si les coordonnées du point $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation de la droite (IJ)

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} = -1 + 1 = 0$$

Donc : $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ vérifient l'équation de la droite (IJ)

Par suite : droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$

Exercice13 : (****) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m): x + my + m - 3 = 0$

1) Démontrer que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe $F(x_F; y_F)$ dont on déterminera les coordonnées

2) Déterminer la valeur de m dans les cas suivants :

a) (D_m) passe par le point $A(-4;2)$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées

c) $(D_m) \parallel (\Delta)$ telle que : $(\Delta): 3x - 4y + 6 = 0$

Solution : 1) $m \in \mathbb{R}$ $(D_m): x + my + m - 3 = 0$

$F(x_F; y_F) \in (D_m)$ Pour tout $m \in \mathbb{R}$ signifie : $x_F + my_F + m - 3 = 0$

Equivalut à : $x_F - 3 + m(y_F + 1) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_F - 3 = 0$ et $y_F + 1 = 0$ c'est-à-dire : $x_F = 3$ et $y_F = -1$

Donc quel que soit $m \in \mathbb{R}$ on a $F(3; -1) \in (D_m)$

2)a) (D_m) passe par le point $A(4;3)$ Cela Signifie que : $-4 + 2m + m - 3 = 0$

Equivalut à : $3m - 7 = 0$ c'est-à-dire : $m = \frac{7}{3}$

b) (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées signifie : $x = a$

Cela Signifie que : $m = 0$

c) le vecteur directeur de (D_m) est : $\vec{u}_m(-m; 1)$ et le vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v}(4; 3)$

$(D_m) \parallel (\Delta)$ Cela Signifie que : $\det(\vec{u}_m; \vec{v}) = 0$

Equivalut à : $\begin{vmatrix} -m & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Equivalut à : $-3m - 4 = 0$ c'est-à-dire : $m = -\frac{4}{3}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

