

**Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2
sur les leçons suivantes :**

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : Les nombres $\frac{54}{40}, \frac{126}{450}, \frac{75}{90}, \frac{17}{7}, \frac{1}{3}$

Sont-ils des décimaux ?

Corrigé : $\frac{54}{40} = 1.35 = \frac{135}{10^2} \in \mathbb{D}$; $\frac{126}{450} = 0.28 = \frac{28}{10^2} \in \mathbb{D}$

$$\frac{75}{90} = \frac{5}{6} = 0.8333333333... \notin \mathbb{D}$$

$$\frac{17}{7} = 0.428571429... \notin \mathbb{D} ; \frac{1}{3} = 0.333333... \text{ est rationnel mais } \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Remarque : Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :
2.4285714285714285714285714285714... ; 428571 se répète.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ont dit que : $\sqrt{2}$ est un irrationnel

Un irrationnel a une écriture décimale non périodique infinie :

Exemple : 1.4142135623730950488016887242...

Exercice02 : $a \in \mathbb{R}$ on pose : $H = (x+2)^2 - (x-2)^2$

1) Développer et calculer et simplifier H

2) En déduire une simplification du nombre : $(1000002)^2 - (999\,998)^2$

Corrigé : 1) $A = (x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4)$

$$\text{Donc : } A = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

2) On pose : $a = 1000000$ donc : $A = (1000002)^2 - (999\,998)^2 = 8 \times 1000000 = 8000000$

Par suite : $(1000002)^2 - (999\,998)^2 = 8000000$

Exercice03 : Calculer et simplifier $A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$$\text{Corrigé : } A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) - (\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$A = \frac{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$A = \frac{-4\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{5-2} = \frac{-4}{3} \sqrt{10}$$

Exercice04 : Simplifier et écrire sous forme d'une puissance

$$A = 2^3 \times (2^2)^4 \times (2^{-5})^3 \quad B = (-3)^1 \times (-3)^5 \times (3)^2 \times (-3)^{-10}$$

$$C = \frac{3^{-5} \times 4^{-2}}{12^3} \times \frac{9}{2^2} \quad D = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}}$$

$$E = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5} \quad F = \frac{10^{-4} \times (10^3)^2}{10^3} \quad X = \frac{2^3 \times 3^5 \times 5^6}{2^5 \times 3 \times 15^4}$$

Corrigé : $A = 2^3 \times (2^2)^4 \times (2^{-5})^3 = 2^3 \times 2^{2 \times 4} \times 2^{-5 \times 3} = 2^{3+8-15} = 2^{-4}$

$$A = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$B = (-3)^1 \times (-3)^5 \times (3)^2 \times (-3)^{-10} = -(3)^1 \times -(3)^5 \times (3)^2 \times (3)^{-10}$$

$$B = 3^1 \times 3^5 \times 3^2 \times 3^{-10} = 3^{1+5+2-10} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$C = \frac{3^{-5} \times 4^{-2}}{12^3} \times \frac{9}{2^2} = \frac{3^{-5} \times (2^2)^{-2}}{(3 \times 2^2)^3} \times \frac{3^2}{2^2} = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2}$$

$$C = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2} = 3^{-5} \times 2^{-4} \times 3^2 \times (3)^{-3} \times 2^{-6} \times 2^{-2} = 3^{-5-3+2} \times 2^{-4-6-2}$$

$$C = 3^{-6} \times 2^{-12}$$

$$D = \frac{(-2)^3 \times (4^2)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}} = \frac{-2^3 \times 4^{2 \times (-1)} \times 2^3}{1024 \times (-2^3)^{-4}} = \frac{-2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3}{2^{10} \times (-2^3)^{-4}}$$

$$D = -2^3 \times (2^2)^{-2} \times 2^3 \times 2^{-10} \times (-2)^{3 \times 4} = -2^{3-4+3-10+12} = -2^4 = -16$$

$$E = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5} = 10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4} \times 10^2 \times 10^{-3} \times 10^{-5}$$

$$E = 10^{-8+9+7-4+2-3-5} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$F = \frac{10^{-4} \times (10^3)^2}{10^3} = 10^{-4} = \frac{1}{10}$$

$$X = \frac{2^3 \times 3^5 \times 5^6}{2^5 \times 3 \times 15^4} = \frac{2^3 \times 3^5 \times 5^6}{2^5 \times 3 \times (3 \times 5)^4} = \frac{2^3 \times 3^5 \times 5^6}{2^5 \times 3 \times 3^4 \times 5^4} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Exercice05 : On pose : $a = \sqrt{19+6\sqrt{10}}$ et $b = \sqrt{19-6\sqrt{10}}$

1) Montrer que : $a \times b = 1$

2) on pose : $u = a+b$ et $v = a-b$

Calculer u^2 et v^2

3) en déduire une écriture des nombres u et v

4) en déduire une écriture des nombres a et b

Corrigé : 1) $ab = \sqrt{19+6\sqrt{10}} \sqrt{19-6\sqrt{10}} = \sqrt{(19+6\sqrt{10})(19-6\sqrt{10})}$

$$ab = \sqrt{19^2 - (6\sqrt{10})^2} = \sqrt{361 - 360} = \sqrt{1} = 1$$

2) $u = a+b$ et $v = a-b$

$$u^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2 \times 1$$

$$\text{Donc : } u^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 19 - 6\sqrt{10} + 2 \times 1 = 40$$

$$v^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2 \times 1$$

$$\text{Donc : } v^2 = 19 + 6\sqrt{10} + 19 - 6\sqrt{10} - 2 \times 1 = 36$$

3) déduction des nombres u et v :

$$\text{On a : } u^2 = 40 \text{ Donc : } u = \sqrt{40} \text{ ou } u = -\sqrt{40}$$

Or on a $u = a+b$ somme de deux nombres positifs

$$\text{Alors : } u = a+b \text{ est positif donc : } u = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{On a : } v^2 = 36 \text{ Donc } v = \sqrt{36} \text{ ou } v = -\sqrt{36}$$

Or on a : $v = a-b$ et on Remarque que $a > b$

$$\text{Donc : } v = a-b \text{ est positif donc : } v = \sqrt{36} = 6$$

4) déduction des nombres a et b

$$\text{On a : } \begin{cases} u = 2\sqrt{10} \\ v = 6 \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} a+b = 2\sqrt{10} \\ a-b = 6 \end{cases}$$

On fait la somme membre à membre on trouve :

$$2a = 6 + 2\sqrt{10} \text{ Donc : } a = \frac{6 + 2\sqrt{10}}{2} = 3 + \sqrt{10}$$

$$\text{Et on a : } a+b = 2\sqrt{10} \text{ Donc : } b = 2\sqrt{10} - a$$

$$\text{Donc : } b = 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{10} \text{ cad } b = \sqrt{10} - 3$$

Exercice06: Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$A = (2x+5)^2 - 36 \quad ; \quad B = x^6 + 2x^3 + 1 \quad ; \quad C = a^2 + 4b^2 - x^2 + 4ab \quad ; \quad D = x^3 - 64$$

$$E = (3x+2)^3 - 27 \quad ; \quad F = x^3 + 8 + 3(x^2 - 4) - 2(x+2)$$

$$G = 9x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 + (1-3x)(3x-\sqrt{2}) \quad ; \quad H = (x-3)(2x-1) + x^3 - 27$$

Corrigé : $A = (2x+5)^2 - 36$

$$A = (2x+5)^2 - 6^2 = (2x+5-6)(2x+5+6) \text{ est du type : } a^2 - b^2$$

$$A = (2x-1)(2x+11)$$

$$B = x^6 + 2x^3 + 1$$

$$B = (x^3)^2 + 2 \times x^3 \times 1 + 1^2 \text{ est du type : } a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Donc : } B = (x^3 + 1)^2$$

$$C = a^2 + 4b^2 - x^2 + 4ab$$

$$C = (a^2 + 4ab + 4b^2) - x^2$$

$$C = (a^2 + 2 \times a \times 2b + (2b)^2) - x^2 = (a+2b)^2 - x^2 = (a+2b-x)(a+2b+x)$$

$$D = x^3 - 64 = x^3 - 4^3 \text{ On a : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Donc : } D = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$\text{Donc : } D = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$E = (3x+2)^3 - 27 = (3x+2)^3 - 3^3 \text{ On a : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Donc : } E = ((3x+2)-3)((3x+2)^2 + 3(3x+2) + 3^2)$$

$$\text{Donc : } E = (3x-1)((3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 + 9x + 6 + 9)$$

$$\text{Donc : } E = (3x-1)(9x^2 + 12x + 4 + 9x + 6 + 9)$$

$$\text{Donc : } E = (3x-1)(9x^2 + 21x + 19)$$

$$F = x^3 + 8 + 3(x^2 - 4) - 2(x + 2)$$

$$F = x^3 + 2^3 + 3(x^2 - 2^2) - 2(x + 2) \text{ et on a : } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab - b^2) \text{ et } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{Donc : } F = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) + 3(x + 2)(x - 2) - 2(x + 2) \text{ On a : } x + 2 \text{ facteur commun}$$

$$\text{Donc : } F = (x + 2)[(x^2 - 2x + 2^2) + 3(x - 2) - 2]$$

$$\text{Donc : } F = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 + 3x - 6 - 2)$$

$$\text{Donc : } F = (x + 2)(x^2 + x - 4)$$

$$G = 9x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 + (1 - 3x)(3x - \sqrt{2})$$

$$G = (3x)^2 - 2 \times 3x\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (1 - 3x)(3x - \sqrt{2})$$

$$G = (3x - \sqrt{2})^2 + (1 - 3x)(3x - \sqrt{2}) = (3x - \sqrt{2})(3x - \sqrt{2} + 1 - 3x) \text{ C'est-à-dire : } G = (3x - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

$$H = (x - 3)(2x - 1) + x^3 - 27$$

$$H = (x - 3)(2x - 1) + x^3 - 3^3 = (x - 3)(2x - 1) + (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2)$$

$$H = (x - 3)(2x - 1 + x^2 + 3x + 9) = (x - 3)(x^2 + 5x + 8)$$

Exercice07 : Soient : a ; b des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b} \leq 1$.

Montrer que : $\frac{a}{b} \leq \frac{a+2}{b+2}$.

Correction : Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+2}{b+2}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b}$.

$$\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+2) - a(b+2)}{b(b+2)} = \frac{ba + 2b - ab - 2a}{b(b+2)}$$

$$\text{Donc : } \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{2b - 2a}{b(b+2)} = \frac{2(b-a)}{b(b+2)} \text{ et puisque : } b \text{ et } 2 \text{ des réels strictement positifs}$$

$$\text{Alors : } b(b+2) > 0 \text{ et on a aussi : } \frac{a}{b} \leq 1$$

$$\text{Donc : } b \times \frac{a}{b} \leq b \times 1 \text{ c'est à dire : } a \leq b$$

$$\text{Par suite : } 0 \leq b - a$$

$$\text{Donc : } \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} \geq 0 \text{ et par conséquent : } \frac{a+c}{b+c} \geq \frac{a}{b}$$

Exercice08 : Soient $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ Comparer : $x = \frac{2a+3b}{2a}$ et $y = \frac{12b}{2a+3b}$

$$\text{Correction : On a : } x - y = \frac{2a+3b}{2a} - \frac{12b}{2a+3b}$$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{(2a+3b)^2 - 24a \times b}{2a(2a+3b)}$$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{4a^2 + 12ab + 9b^2 - 24a \times b}{2a(2a+3b)}$$

$$\text{Donc : } x-y = \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{2a(2a+3b)} = \frac{(2a)^2 - 2 \times 2a \times 3b + (3b)^2}{2a(2a+3b)}$$

$$\text{Donc : } x-y = \frac{(2a-3b)^2}{2a(2a+3b)} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Car : } 2a(2a+3b) \in \mathbb{R}^{++} \quad \text{et } (2a-3b)^2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{D'où : } x \geq y$$

Exercice09 : Soit x un élément de l'intervalle $\left[-\frac{5}{3}; +\infty\right[$

Comparer : 11 et $-3x + \frac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Correction : On a $x \in \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right[$ donc : $x \geq -\frac{5}{3}$

$$\text{Donc : } x \times (-3) \leq -\frac{5}{3} \times (-3) \text{ c'est à dire : } -3x \leq 5$$

$$\text{Donc : } -3x + \frac{1}{2} \leq 5 + \frac{1}{2} \text{ c'est à dire : } -3x + \frac{1}{2} \leq \frac{11}{2}$$

$$\text{Donc : } \textcircled{1} -3x + \frac{1}{2} \leq \frac{11}{2} \text{ et on sait que : } \frac{11}{2} < 11 \textcircled{2}$$

$$\text{Donc : de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ en déduit que : } -3x + \frac{1}{2} < 11$$

Exercice10 : Résoudre les équations suivantes :

$$1) |x-1| = 2 \quad 2) |3x+2| = |x-4| \quad 3) 3|x+5| = -\frac{1}{2} \quad 4) |x-1| + |2-x| - 3 = 0$$

Correction : 1) $|x-1| = 2$ Signifie que : $x-1=2$ ou $x-1=-2$

Signifie que : $x=3$ ou $x=-1$ Donc : $S = \{-1; 3\}$

2) $|3x+2| = |x-4|$ signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-(x-4)$

Signifie que : $3x+1=x-4$ ou $3x+2=-x+4$

Signifie que : $2x=-5$ ou $4x=2$

Signifie que : $x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Donc : $S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

$$3) 3|x+5| = -\frac{1}{2} \text{ Signifie que : } |x+5| = -\frac{1}{6}$$

$$S = \emptyset \quad \text{Car } |x+5| \geq 0 \text{ et } -\frac{1}{6} < 0$$

$$4) |x-1| + |3-x| - 3 = 0$$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$ x-1 $	$-x+1$	0	$x-1$	$x-1$
$3-x$	+	+	0	-
$ 3-x $	$3-x$	$3-x$	0	$x-3$
$ x-1 + 3-x -3$	$1-2x$	-1	$2x-7$	

Si : $x \leq 1$ alors : L'équation $|x-1| + |3-x| - 3 = 0$ devient : $-(x-1) + (3-x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $4 - 2x - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $x = \frac{1}{2} \leq 1$; Donc : $S_1 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Si : $1 \leq x \leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1) + (3-x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $-1 = 0$ Donc : $S_2 = \emptyset$

Si : $x \geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1) - (3-x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $2x - 7 = 0$

Ce qui signifie que : $x = \frac{7}{2} \geq 3$ Donc : $S_3 = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\}$

Exercice11 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$2 \dots [2; 6[$; $6 \dots [2; 6[$; $3 \dots [1; +\infty[$; $100 \dots [0; +\infty[$; $-1 \dots]-\infty; 1]$; $\left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; 2 \right\} \dots [0; 3[$
 $\{0; 1; 200\} \dots]0; +\infty[$; $]0; 1[\dots \mathbb{Q}$.

Correction : $2 \in [2; 6[$; $6 \notin [2; 6[$; $3 \in [1; +\infty[$; $100 \in [0; +\infty[$; $-1 \notin]-\infty; 1]$;

$\left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; 2 \right\} \subset [0; 3[$

$\{0; 1; 200\} \not\subset]0; +\infty[$ car $0 \in \{0; 1; 200\}$ et $\notin]0; +\infty[$; $]0; 2[\not\subset \mathbb{Q}$ car $\sqrt{2} \in]0; 2[$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice12 : Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$$

Correction : $\left\{ \begin{array}{l} \text{c'est l'intersection} \\ 1) \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$x \geq -2$ Signifie que : $x \in [-2, +\infty[$

Et $x > 0$ Signifie que : $x \in]0, +\infty[$

Donc : $S =]0, +\infty[\cap [-2, +\infty[=]0, +\infty[$

2) $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$ On a : $x \leq 2$ Signifie que : $x \in]-\infty, 2]$

Et $x > 6$ Signifie que : $x \in]6, +\infty[$

Donc : $S =]6, +\infty[\cap]-\infty, 2] = \emptyset$

3) $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$; $x > \frac{1}{2}$ Signifie que : $x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

Et $x \geq -1$ Signifie que : $x \in [-1, +\infty[$

Donc : $S = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\cap [-1, +\infty[= \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

$$4) \begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$$

$-2 \leq x \leq 7$ Signifie que : $x \in [-2; 7]$

$-5 < x < 6$ Signifie que : $x \in]-5; 6[$

Donc : $S =]-5; 6[\cap [-2; 7] = [-2; 6[$

Exercice13 : Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ 2) $|2x-3| < 1$ 3) $|x+3| > \frac{4}{7}$

Correction : 1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

2) $|2x-3| < 1$ Signifie $-1 < 2x-3 < 1$

Signifie que : $-1+3 < 2x-3+3 < 1+3$ Signifie que : $2 < 2x < 4$

Signifie $2 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 4 \times \frac{1}{2}$

C'est-à-dire que : $1 < x < 2$ donc : $S =]1; 2[$

3) $|x+3| > \frac{4}{7}$ Signifie $x+3 > \frac{4}{7}$ ou $x+3 < -\frac{4}{7}$

Signifie $x > \frac{4}{7} - 3$ ou $x < -\frac{4}{7} - 3$

Signifie $x > -\frac{17}{7}$ ou $x < -\frac{25}{7}$

Donc $S =]-\infty; -\frac{25}{7}[\cup]-\frac{17}{7}; +\infty[$

Exercice14 : Soient a et b deux réels tels que : $\left| \frac{3a-11}{a-2} \right| < 2$ et $\left| \frac{2b-3}{b+1} - 5 \right| < 2$

1) Montrer que : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé : 1) a) Montrons que : $3 < a < 7$

On a : $\left| \frac{3a-11}{a-2} \right| < 2$ donc : $-2 < \frac{3a-11}{a-2} < 2$

Donc : $-2 < \frac{3a-6+6-11}{a-2} < 2$

Donc : $-2 < \frac{3(a-2)-5}{a-2} < 2$ c'est-à-dire : $-2 < \frac{3(a-2)}{a-2} - \frac{5}{a-2} < 2$

Donc : $-2 < 3 - \frac{5}{a-2} < 2$ c'est-à-dire : $-2-3 < -\frac{5}{a-2} < 2-3$

Donc : $-5 < -\frac{5}{a-2} < -1$ c'est-à-dire : $1 < \frac{5}{a-2} < 5$

Donc : $\frac{1}{5} < \frac{a-2}{5} < 1$ c'est-à-dire : $1 < a-2 < 5$

Donc : $\boxed{3 < a < 7}$

b) Montrons que : $-6 < b < -2$

On a : $\left| \frac{2b-3}{b+1} - 5 \right| < 2$ donc : $-2 < \frac{2b-3}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < \frac{2(b+1)-2-3}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < \frac{2(b+1)}{b+1} - \frac{5}{b+1} - 5 < 2$ c'est-à-dire : $-2 < 2 - \frac{5}{b+1} - 5 < 2$

Donc : $-2 < -\frac{5}{b+1} - 3 < 2$ c'est-à-dire : $1 < -\frac{5}{b+1} < 5$

Donc : $\frac{1}{5} < -\frac{b+1}{5} < 1$ c'est-à-dire : $-1 < \frac{b+1}{5} < -\frac{1}{5}$

Donc : $-5 < b+1 < -1$ c'est-à-dire : $\boxed{-6 < b < -2}$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

On a : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

Donc : $3+(-6) < a+b < 7+(-2)$

Donc : $-3 < a+b < 5$

Donc : $-3+1 < a+b+1 < 5+1$

Donc : $\boxed{-2 < a+b+1 < 6}$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

Donc : $3 < a < 7$ et $2 < -b < 6$

Donc : $6 < -ab < 42$

Donc : $\boxed{-42 < ab < -6}$

3) Déduisons une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3 < a < 7$ donc $6 < 2a < 14$ et $-6 < b < -2$

$0 < 2a+b < 12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$$(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - 2a^2 - b^2 - 3ab = 2a^2 + ab = a(2a+b)$$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b) > 0$

Par suite : $(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 > 0$

Alors : $\boxed{2a+b > \sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

Exercice15 : Soient a et b deux réels tel que : $a \in [0;2]$ et $b \in [0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b| \leq \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.867$ et $0.707 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 1,2 \times 10^{-1}$

Corrigé : 1) $\left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \left| \frac{3(2+b) - 3(2+a)}{(2+b)(2+a)} \right| = \left| \frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)} \right|$

Donc : $\left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \left| \frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)} \right| = \left| \frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)} \right|$

Donc : $\left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \frac{3|b-a|}{|(2+b)(2+a)|} = \frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$ Car : $|b-a| = |a-b|$

Or on a : $a \in [0; 2]$ signifie $0 \leq a \leq 2$

Et on a : $b \in [0; 2]$ signifie $0 \leq b \leq 2$

Donc : $2 \leq 2+a \leq 4$ et $2 \leq 2+b \leq 4$ Par suite : $4 \leq (2+b)(2+a) \leq 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)| = (2+b)(2+a)$ et on a aussi : $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16} \leq \frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{3|a-b|}{4}$ car : $3|a-b| \geq 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b| \leq \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.867$ et $0.707 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et on a : $-0.708 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq -0.707$

Donc : $0.866 - 0.708 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0.867 - 0.707$

Donc : $0.158 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16$ et $0.16 - 0.158 = 2 \times 10^{-3}$

Par suite : 0,16 est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

0,158 : Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq \frac{3}{4} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|$ et on a : $0.158 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16$

Donc : $0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16$ Par suite : $\frac{3}{4} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq \frac{3}{4} \times 0.16 = 0.12$ Finalement :

$\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 0.12$ C'est-à-dire : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 1,2 \times 10^{-1}$

Exercice16 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$ et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$.

- 1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection $H(x; y)$
- 2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1) .
- 4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point $C(1,2)$ et parallèle à (D_2)

Solutions : 1) $(6) \times (-2) - 3 \times 3 = -12 - 9 = -21 \neq 0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système :

$$\begin{cases} 6x+3y+2=0 \\ 3x-2y-1=0 \end{cases} \quad \text{C'est-à-dire : } \begin{cases} 6x+3y=-2 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

$$\text{Donc solution unique : } x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{1}{21} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{-21} = -\frac{4}{7}$$

Par suite : le point d'intersection est $H\left(-\frac{1}{21}; -\frac{4}{7}\right)$

2) la droite (AB) a une équation de la forme : $(AB) : ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ donc : $a=-4$ et $b=-2$

L'équation devient : $-4x-2y+c=0$ et on a : $A \in (AB)$ donc : $-4-4+c=0$ c'est-à-dire : $c=8$

Donc : $(AB) : -4x-2y+8=0$ ou : $(AB) : 2x+y-4=0$

3) On a $(AB) : 2x+y-4=0$ et $(D_1): 6x+3y+2=0$

Et on a : $(6) \times (1) - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$ donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèle à (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2,3)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(1,2)$; Par suite $(\Delta) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Exercice17 : (****) Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$; $B(2;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

2) On associe à chaque nombre réel m la droite $(D_m): (m-1)x - 2my + 3 = 0$

Et soit (D') la droite définie par l'équation cartésienne suivante : $(D') : -\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3} = 0$

a) Donner la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D')

b) Donner la valeur de m pour que B soit un point de (D_m)

c) Montrer que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E , dont vous déterminez les coordonnées.

Solution :1) On cherche une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;2)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y) \in (D)$

$M(x;y) \in (D)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;2)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Équivaut à : $2(x+2) - 5(y-1) = 0$

Équivaut à : $2x + 4 - 5y + 5 = 0$ Équivaut à : $2x - 5y + 9 = 0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (D) est : $(D): 2x - 5y + 9 = 0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $(D) ax + by + c = 0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;2)$

Donc : $a = 2$ et $b = -5$ alors l'équation devient : $(D) 2x - 5y + c = 0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A \in (\Delta)$

Donc : $2 \times (-2) - 5 \times 1 + c = 0$ c'est-à-dire : $-4 - 5 + c = 0$ donc : $c = 9$

Par suite : $(\Delta): 2x - 5y + 9 = 0$

2) On a : $(D_m): (m-1)x - 2my + 3 = 0$ et $(D'): -\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3} = 0$

a) Déterminons la valeur de m pour que (D_m) soit parallèle à (D')

Soit : $m \in \mathbb{R}$ on a : $(D_m): (m-1)x - 2my + 3 = 0$ et $(D'): -\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3} = 0$

Donc : $\vec{u}_m(2m; m-1)$ est vecteur directeur de (D_m) et $\vec{v}(-1; -\frac{2}{3})$ est vecteur directeur de (D')

(D_m) est parallèle à (D') signifie $\vec{u}_m(2m; m-1)$ et $\vec{v}(-1; -\frac{2}{3})$ sont colinéaires

Signifie $\det(\vec{u}_m; \vec{v}) = 0$ Equivaut à : $\begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m-1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$

Equivaut à : $-\frac{2}{3} \times 2m - (-1)(m-1) = 0$ Equivaut à : $-\frac{4}{3}m + m - 1 = 0$ Equivaut à : $-\frac{m}{3} - 1 = 0$

Equivaut à : $\frac{-m-3}{3} = 0$ c'est-à-dire : $\boxed{m = -3}$

Pour que (D_m) est parallèle à (D') il faut que $m = -3$

b) On cherche la valeur de m pour que : $B \in (D_m)$

Soit : $m \in \mathbb{R}$ on a : $B(2;4) \in (D_m)$ Equivaut à : $(m-1) \times 2 - 2m \times 4 + 3 = 0$

Equivaut à : $2m - 2 - 8m + 3 = 0$

Equivaut à : $-6m + 1 = 0$ c'est-à-dire : $\boxed{m = \frac{1}{6}}$; Pour que $B \in (D_m)$ il faut que $m = \frac{1}{6}$

c) Montrons que tous les droites (D_m) passent par un point fixe E

Soit : $m \in \mathbb{R}$; $(D_m) : (m-1)x - 2my + 3 = 0$

$E(x_E, y_E) \in (D_m)$ signifie : $(m-1)x_E - 2my_E + 3 = 0$

Equivalut à : $mx_E - x_E - 2my_E + 3 = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

Equivalut à : $m(x_E - 2y_E) + 3 - x_E = 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$

Cela Signifie que : $x_E - 2y_E = 0$ et $3 - x_E = 0$

Cela Signifie que : $3 - 2y_E = 0$ et $x_E = 3$

Cela Signifie que : $y_E = \frac{3}{2}$ et $x_E = 3$

Donc toutes les droites (D_m) passent par un point fixe : $E\left(3; \frac{3}{2}\right)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien