Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : On pose : $B=100\left(\frac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2$ Montrer que : $B\in\mathbb{N}$

Corrigé : $B=100\left(\frac{2+22+222+2222}{4+44+444+4444}\right)^2=100\left(\frac{2(1+11+111+1111)}{4(1+11+111+1111)}\right)^2=100\left(\frac{2}{4}\right)^2=100\frac{1}{4}=25\in\mathbb{N}$

Donc : $B=25\in\mathbb{N}$

Exercice02 : On pose : $A=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$

1)Montrer que : $A^2=100$

2) En déduire que : $A\in\mathbb{Z}^-$

Corrigé : 1) Montrons que : $A^2=100$

$$A^2=\left(\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A^2=\left(\sqrt{57-40\sqrt{2}}\right)^2-2\sqrt{57-40\sqrt{2}}\sqrt{57+40\sqrt{2}}+\left(\sqrt{57+40\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A^2=57-40\sqrt{2}-2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\left(57+40\sqrt{2}\right)}+57+40\sqrt{2}$$

$$A^2=114-2\sqrt{57^2-\left(40\sqrt{2}\right)^2}=114-2\sqrt{3249-3200}=114-2\sqrt{49}=114-14=100$$

Donc : $A^2=100$

2) On a : $A^2=100$

Donc : $A=\sqrt{100}$ ou $A=-\sqrt{100}$

Donc : $A=10$ ou $A=-10$ or $\sqrt{57-40\sqrt{2}}<\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ c'est-à-dire : $A<0$

Par suite : $\boxed{A=-10}$

Conclusion : $A\in\mathbb{Z}^-$

Exercice03 : Montrer que : $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\in\mathbb{N}$

Corrigé : 1) Montrons que $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\in\mathbb{N}$

$$A=\left[\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{7}\right)\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{7}\right)\right]\left(\sqrt{7}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right)\left(\sqrt{7}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2\right)$$

$$A=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}^2-\sqrt{7}^2\right)\left(\sqrt{7}^2-\left(\sqrt{5}\right)^2+2\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}^2\right)$$

$$A=\left(5+2\sqrt{30}+6-7\right)\left(7-5+2\left(\sqrt{30}\right)-6\right)$$

$$A=\left(4+2\sqrt{30}\right)\left(-4+2\left(\sqrt{30}\right)\right)=\left(2\sqrt{30}+4\right)\left(2\sqrt{30}-4\right)=\left(2\sqrt{30}\right)^2-4^2=120-16=104\in\mathbb{N}$$

Exercice04 : $a \in \mathbb{R}^* \; ; \; b \in \mathbb{R}^*$

On considère le nombre : $C = \dfrac{\left(ab^2\right)^3 \times a^4 b^2}{\left(ab\right)^5}$

1) Calculer et simplifier C

2) Ecrire C sous la forme d'une puissance de base 10 Sachant que ; $a = \dfrac{1}{10}$ et $b = 100$.

Corrigé : 1) $C = \dfrac{\left(ab^2\right)^3 \times a^4 b^2}{\left(ab\right)^5} = \dfrac{a^3 \times b^6 \times a^4 \times b^2}{a^5 \times b^5} = \dfrac{a^7 \times b^8}{a^5 \times b^5} = a^2 \times b^3$

2) $a = \dfrac{1}{10}$ et $b = 100$

Donc : $C = \left(10^{-1}\right)^2 \times \left(10^2\right)^3 = 10^{-2} \times 10^6 = 10^4$

Exercice05 : Factoriser les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R} \; ; y \in \mathbb{R}$

$A = 3x\left(9x^2 - 12x + 4\right) + \left(5x - 1\right)\left(3x^2 - 2x\right) + 6x^2\left(3x - 2\right)$

$B = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$C = 16x^4 - 1$

$D = \left(2x+1\right)^2 + \left(2x-1\right)^2 - 12x^2$

$E = 4y^2 - 2y - 9x^2 + 3x$

Corrigé : $A = 3x\left(9x^2 - 12x + 4\right) + \left(5x - 1\right)\left(3x^2 - 2x\right) + 6x^2\left(3x - 2\right)$

$A = 3x\left(\left(3x\right)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2\right) + x\left(5x-1\right)\left(3x-2\right) + 6x^2\left(3x-2\right)$

$A = 3x\left(3x-2\right)^2 + x\left(5x-1\right)\left(3x-2\right) - 6x \times x\left(3x-2\right)$ On a : $x\left(3x-2\right)$ facteur commun

$A = x\left(3x-2\right)\left[3\left(3x-2\right) + 3\left(5x-1\right) - 6x\right] = x\left(3x-2\right)\left(9x - 6 + 15x - 3 - 6x\right) = x\left(3x-2\right)\left(18x-3\right)$

$B = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$B = \left(2x^3 - x^2\right) + 5\left(-2x+1\right)$

$B = x^2\left(2x-1\right) - 5\left(2x-1\right)$ On a : $2x-1$ facteur commun

$B = \left(2x-1\right)\left(x^2-5\right) = \left(2x-1\right)\left(x^2 - \sqrt{5}^2\right) = \left(2x-1\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

$C = 16x^4 - 1 = \left(2x\right)^4 - 1^4 = \left(\left(2x\right)^2\right)^2 - \left(1^2\right)^2$

$C = \left(\left(2x\right)^2 - 1^2\right)\left(\left(2x\right)^2 + 1^2\right) = \left(2x-1\right)\left(2x+1\right)\left(4x^2+1\right)$

$D = \left(2x+1\right)^2 + \left(2x-1\right)^2 - 12x^2$ On peut Développer d'abord et après factoriser

$D = 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 - 12x^2$

$D = 2 - 4x^2 = 2\left(1 - 2x^2\right) = 2\left(1^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2\right) = 2\left(1 - \sqrt{2}x\right)\left(1 + \sqrt{2}x\right)$

Donc : $D = 2\left(1 - \sqrt{2}x\right)\left(1 + \sqrt{2}x\right)$

$E = 4y^2 - 2y - 9x^2 + 3x = 4y^2 - 9x^2 - \left(2y - 3x\right)$

$E = \left(2y-3x\right)\left(2y+3x\right) - \left(2y-3x\right) \times 1 = \left(2y-3x\right)\left(2y+3x-1\right)$

Exercice06 : Comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ 2) $a=\dfrac{-3}{\sqrt{17}+2}$ et $b=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}+2}$

3) $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 4) $a=6+5\sqrt{3}$ et $b=4+6\sqrt{2}$

Corrigé : 1) On compare : $a=\sqrt{14}$ et $b=\sqrt{7}+\sqrt{2}-1$

On calcul la différence : $a-b=\sqrt{14}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{7\times 2}-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{7}-\sqrt{2}+1=\sqrt{7}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

On factorise par : $\sqrt{7}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$

On a : $\sqrt{2}>1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Et on a: $\sqrt{7}>1$ car $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $1^2=1$ donc : $\left(\sqrt{7}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a>b$

2) On compare : $a=\dfrac{-3}{\sqrt{17}+2}$ et $b=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}+2}$

On va comparer : $\sqrt{17}$ et $3\sqrt{2}$

On a : $3\sqrt{2}>\sqrt{17}$ car $\left(\sqrt{17}\right)^2=17$ et $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$

Donc : $3\sqrt{2}+2>\sqrt{17}+2$

Donc : $\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2}<\dfrac{1}{\sqrt{17}+2}$

Donc : $\dfrac{-5}{3\sqrt{2}+2}>\dfrac{-5}{\sqrt{17}+2}$ par suite: $b>a$

3) $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

On a : $3>\sqrt{7}$ car $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $(3)^2=9$

Donc : $a=\dfrac{\sqrt{7}-3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}<0$ car $\sqrt{7}-3<0$ et $2\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$

On a aussi : $2\sqrt{2}>\sqrt{5}$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ Donc : $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}>0$

Puisque a est négatif et b est positif

Alors : $b>a$

4) $a=6+5\sqrt{3}$ et $b=4+6\sqrt{2}$

On a : $6>4$ et $5\sqrt{3}>6\sqrt{2}$ car $\left(5\sqrt{3}\right)^2=75$ et $\left(6\sqrt{2}\right)^2=72$

On a donc : $\begin{cases}5\sqrt{3}>6\sqrt{2}\\ 6>4\end{cases}$ par sommation membre a membre

Alors : $6+5\sqrt{3}>4+6\sqrt{2}$

Donc : $a>b$

Exercice07 : 1) Vérifier que $17^2 < 300 < 18^2$ et en déduire que ; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$.

3) En déduire que : $0,14 < \sqrt{15} - 2\sqrt{3} < 0,74$

4) Déterminer une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

Corrigé : 1) On a $17^2 = 289$ et $18^2 = 324$ donc : $17^2 < 300 < 18^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{17^2} < \sqrt{300} < \sqrt{18^2}$

Donc : $\sqrt{17^2} < \sqrt{3\times100} < \sqrt{18^2}$

C'est-à-dire : $17 < \sqrt{3}\times10 < 18$

Donc : $17\times\frac{1}{10} < \sqrt{3}\times10\times\frac{1}{10} < 18\times\frac{1}{10}$

Cela équivaut à : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

2) On a $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$ donc : $22^2 < 500 < 23^2$ C'est-à-dire : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$.

Donc : $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$

Cela équivaut à : $22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$

Par suite : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) $\sqrt{15} - 2\sqrt{3} = \sqrt{15} + \left(-2\sqrt{3}\right)$

On a $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

Donc : $3,4 < 2\sqrt{3} < 3,6$ et $3,74 < \sqrt{3}\sqrt{5} < 4,14$

Donc : $-3,6 < -2\sqrt{3} < -3,4$ et $3,74 < \sqrt{15} < 4,14$

Donc : $0,14 < \sqrt{15} + \left(-2\sqrt{3}\right) < 0,74$ Donc : $\boxed{0,14 < \sqrt{15} - 2\sqrt{3} < 0,74}$

4) Déterminons une valeur approchée par défaut et par excès de $\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés

On a : $0,14 < \sqrt{15} - 2\sqrt{3} < 0,74$ et $0,74 - 0,14 = 0,6 = 6\times10^{-1}$

Une valeur approchée par défaut de $\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0,14$

Une valeur approchée par excès de $\sqrt{15} - 2\sqrt{3}$ a 6×10^{-1} prés est : $0,74$

Exercice08 : 1) Résoudre les équations :

a) $3|x-5| = 2|4-3x|$ b) $-2|2x-13| = 1$ c) $(x-2)^2 - |x-2| = 0$

2) Résoudre les inéquations : a) $|2x+1| \leq 4$ b) $|x-9| \geq \frac{1}{2}$ c) $2 < |x| < 3$

Corrigé : 1) a) **Égalité de deux valeurs absolues :**

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |3| = |−3|

$3|x-5| = 2|4-3x|$ Signifie que : $|3x-15| = |8-6x|$

Signifie que : $3x - 15 = 8 - 6x$ ou $3x - 15 = -(8-6x)$

Signifie que : $9x = 23$ ou $-3x = 7$

Signifie que : $x = \frac{23}{9}$ ou $x = -\frac{7}{3}$

Donc : $S = \left\{-\frac{7}{3}; \frac{23}{9}\right\}$

b) $-2|2x-13|=1$ Signifie que : $|2x-13|=-\frac{1}{2}$

Donc : $S=\varnothing$ car la valeur absolue est toujours positive

c) $(x-2)^2-|x-2|=0$ Signifie que : $|x-2|^2-|x-2|=0$ car $|X|^2=X^2$

Signifie que : $|x-2|(|x-2|-1)=0$

Signifie que : $|x-2|=0$ ou $|x-2|-1=0$

Signifie que : $x-2=0$ ou $|x-2|=1$

Signifie que : $x-2=0$ ou $x-2=1$ ou $x-2=-1$

Signifie que : $x=2$ ou $x=3$ ou $x=1$

Donc : $S=\{1;2;3\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|2x+1|\leq 4$

Règle : $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x+1|\leq 4$ Signifie que : $-4\leq 2x+1\leq 4$

Signifie que : $-4-1\leq 2x+1-1\leq 4-1$

Signifie que : $-5\leq 2x\leq 3$

Signifie que : $-\frac{5}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}$

Donc : $S=\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$

b) Résolution de l'inéquation : $|x-9|\geq \frac{1}{2}$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-9|\geq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x-9\geq\frac{1}{2}$ ou $x-9\leq-\frac{1}{2}$ Signifie que : $x\geq\frac{1}{2}+9$ ou $x\leq-\frac{1}{2}+9$

Signifie que : $x\geq\frac{19}{2}$ ou $x\leq-\frac{17}{2}$

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2<|x|<3$

$2<|x|<3$ Signifie que : $|x|<3$ et $|x|>2$

- Résolution de l'inéquation : $|x|<3$

$|x|<3$ Signifie que : $-3<x<3$

Donc : $S_1=]-3;3[$

- Résolution de l'inéquation : $|x|>2$

$|x|>2$ Signifie que : $x>2$ ou $x<-2$

Donc : $S_2=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Finalement on a : $S=S_1\cap S_2=]-3;3[\cap(]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[)$

Donc : $S=]-3;-2[\cup]2;3[$

Exercice09 : Soient a et b deux réels tels que : $0 \leq b \leq 2$ et $|a+2| \leq 1$

1) En cadrer le nombre : a

2) Montrer que : $|a+b+1| \leq 2$

3) a) Vérifier que : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduire un encadrement pour le nombre E.

Corrigé : 1) Soit a tel que : $|a+2| \leq 1$

On a: $|a+2| \leq 1$ signifie que : $-1 \leq a+2 \leq 1$

Signifie que : $-1-2 \leq a+2-2 \leq 1-2$ Signifie que : $\boxed{-3 \leq a \leq -1}$

2) Montrons que : $|a+b+1| \leq 2$

On sait que : $-3 \leq a \leq -1$ et $0 \leq b \leq 2$ donc : $-3 \leq a+b \leq 1$

Par suite : $-2 \leq a+b+1 \leq 2$

Donc : $|a+b+1| \leq 2$

3) On pose : $E=ab-2a+3b$

a) Vérifions que : $E=(a+3)(b-2)+6$

$$(a+3)(b-2)+6 = ab-2a+3b-6+6$$
$$= ab-2a+3b = E$$

Donc : $E=(a+3)(b-2)+6$

b) Déduisons un encadrement pour le nombre E.

On sait que : $E=(a+3)(b-2)+6$

On sait aussi que : $-3 \leq a \leq -1$ et $0 \leq b \leq 2$ donc : $0 \leq a+3 \leq 2$ et $-2 \leq b-2 \leq 0$ et donc : $0 \leq -(b-2) \leq 2$

Par suite : $0 \leq -(a+3)(b-2) \leq 4$

Donc : $-4 \leq (a+3)(b-2) \leq 0$

Donc : $2 \leq (a+3)(b-2)+6 \leq 6$

D'où : $\boxed{2 \leq E \leq 6}$

Exercice10 : On suppose que : $|x-1| \leq \frac{1}{2}$

1) Montrer que : $|x^2-1| \leq \frac{5}{4}$

2) Montrer que : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$

3) En déduire que : si $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

Corrigé : 1) Montrons que : $|x^2-1| \leq \frac{5}{4}$

On a : $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ Equivaut à : $-\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2}$

Equivaut à : $-\frac{1}{2}+1 \leq x \leq \frac{1}{2}+1$ Equivaut à : $\boxed{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}}$

On encadre : x^2-1

On a : $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ donc : $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq \frac{9}{4}$ alors : $\frac{1}{4} - 1 \leq x^2 - 1 \leq \frac{9}{4} - 1$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{4} \leq x^2 - 1 \leq \frac{5}{4}$

Et comme $-\frac{5}{4} \leq -\frac{3}{4}$ donc : $-\frac{5}{4} \leq x^2 - 1 \leq \frac{5}{4}$ Par suite : $\boxed{\left|x^2 - 1\right| \leq \frac{5}{4}}$

2) Montrons que : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$

On a : $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ donc : $1 \leq 2x \leq 3$ par suite : $2 \leq 2x+1 \leq 4$ Alors : $\boxed{\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}}$

3) Déduisons que : si $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

On a : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| = \left|(x-1) \times \frac{1}{2x+1}\right| = |x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right|$

On a aussi : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ et puisque $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$ donc : $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ et donc $\left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2}$

On a donc : $\begin{cases} \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2} \\ |x-1| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ ce qui donne : $|x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

Ce qui signifie que : $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| \leq \frac{1}{4}$

Exercice11 :

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D): 3x - 5y + 6 = 0$ et $(D'): x - y = 0$.

1) Donner une représentation paramétrique des Droites (D) et (D').

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) .Avec : $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et déterminer les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D').

4) Montrer que J est le milieu de $[IB]$.

Solution :1) a) un vecteur directeur de $(D): 3x - 5y + 6 = 0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}(5;3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x = 0$ alors : $(D): 3\times 0 - 5y + 6 = 0$ donc $y = \frac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique de la droites (D) est : $(D)\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = \frac{6}{5} + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

b) un vecteur directeur de $(D'): x - y = 0$ est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x = 0$ alors : $(D'): 0 - y = 0$ donc $y = 0$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$ donc : Donc : $a=-1$ et $b=-3$ par suite (Δ) : $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$ donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a) Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $\begin{cases} 3x-5y=-6 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-\frac{3}{2}+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$ (1)

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve : $-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4) Montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

Exercice12 : Soient $ABCD$ un carré tel que : $AB=a$ avec $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et ABE et BCF deux triangles équilatérales (voir figure ci-contre)

1) Exprimer les vecteurs : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

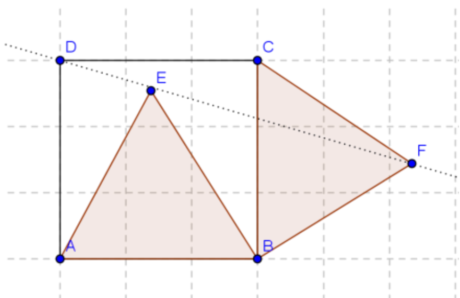
2) Montrer que les points : D ; E ; F sont alignés.

Solution :1) Soit I Le milieu de $[AB]$ et Puisque ABE est un triangle équilatéral alors :

$AE^2=AI^2+IE^2$ Donc : $a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+IE^2$.

Donc : $IE^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$.

Donc : $IE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ par suite : $\overrightarrow{IE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$



Or on a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}$ par suite on a : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit J Le milieu de $[BC]$

De la même façon on trouve que : $JF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\overrightarrow{JF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$ Or on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JF}$

Par suite on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Déduction des coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

On a $A(0;0)$ et $A(1;0)$

On a aussi : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc : $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $E\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a aussi : $\overrightarrow{AF}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc : $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que les points : D ; E ; F sont alignés.

On a : $\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-1\right)=0$$

Les points : D ; E ; F sont alignés.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien