Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :

- L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles
- L'ordre dans $\mathbb{R}$
- La droite dans le plan

Exercice01 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$\frac{2}{4}....\mathbb{Z}$; $-5...\mathbb{Q}$; $\sqrt{3}...\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}^{+}....\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}^{-}....\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}....\mathbb{R}^{-}$; $0....\mathbb{R}^{*}$; $-\frac{100}{20}....\mathbb{Z}$; $\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{5}....\mathbb{R}^{*}$; $-\frac{\sqrt{16}}{3}...\mathbb{Z}$; $-\sqrt{7}...\mathbb{R}^{-}$; $\frac{7}{3}...\mathbb{Q}^{*+}$: $\frac{1}{5}....D$; $\frac{1}{3}....D$; $\{0;-5;-12;-100\}...\mathbb{Z}$; $1....\{-2;5;3\}$; $\mathbb{R}^{-}...\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{-}....\mathbb{R}^{*}$; $1....\varnothing$; $\left\{-\frac{1}{2};\sqrt{3};1\right\}...\mathbb{Q}$

Corrigé :

$\frac{2}{4}\notin\mathbb{Z}$; $-5\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}^{+}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}^{-}\subset\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{R}^{-}$; $0\notin\mathbb{R}^{*}$; $-\frac{100}{20}\in\mathbb{Z}$; $\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{5}\notin\mathbb{R}^{*}$; $-\frac{\sqrt{16}}{3}\notin\mathbb{Z}$; $-\sqrt{7}\in\mathbb{R}^{-}$; $\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}^{*+}$: $\frac{1}{5}\in D$; $\frac{1}{3}\notin D$; $\{0;-5;-12;-100\}\subset\mathbb{Z}$; $1\notin\{-2;5;3\}$; $\mathbb{R}^{-}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{-}\not\subset\mathbb{R}^{*}$; $1\notin\varnothing$;
$\left\{-\frac{1}{2};\sqrt{3};1\right\}\not\subset\mathbb{Q}$

Exercice02 : Soit : $n\in\mathbb{N}$

Montrer que $\frac{2^{n+1}\times7^{n+3}-686}{2^{n}\times7^{n+3}-343}\in\mathbb{N}$.

Corrigé : Montrons que $\frac{2^{n+1}\times7^{n+3}-686}{2^{n}\times7^{n+3}-343}\in\mathbb{N}$

$$\frac{2^{n+1}\times7^{n+3}-686}{2^{n}\times7^{n+3}-343}=\frac{2^{n+1}\times7^{n+3}-2^{1}\times7^{3}}{2^{n}\times7^{n+3}-7^{3}}=\frac{2\times7^{3}\left(2^{n}\times7^{n}-1\right)}{7^{3}\left(2^{n}\times7^{n}-1\right)}=2\in\mathbb{N}$$

Exercice03 : $x\in\mathbb{R}^{*}$ et $y\in\mathbb{R}^{*}$; Simplifier les expressions suivantes le plus simplement possible

$$A=(xy)^{5}\times y^{-3}\times x\times x^{-4}\times y^{-1} \quad ; \quad B=\frac{x^{3}\left(x^{2}y\right)^{-4}}{\left(x^{-1}y^{5}\right)y^{-3}}$$

Corrigé : $A=(xy)^{5}\times y^{-3}\times x\times x^{-4}\times y^{-1}=x^{5}\times y^{5}\times y^{-3}\times x^{1}\times x^{-4}\times y^{-1}$

$$A=x^{5}\times x^{1}\times x^{-4}\times y^{5}\times y^{-3}\times y^{-1}=x^{5+1-4}\times y^{5-3-1}=x^{2}\times y^{1}=x^{2}\times y$$

$$B=\frac{x^{3}\left(x^{2}y\right)^{-4}}{\left(x^{-1}y^{5}\right)y^{-3}}=\frac{x^{3}\times x^{2\times(-4)}y^{-4}}{x^{-1}\times y^{5}\times y^{-3}}=\frac{x^{3-8}\times y^{-4}}{x^{-1}\times y^{5-3}}=\frac{x^{-5}\times y^{-4}}{x^{-1}\times y^{2}}$$

$$B=x^{-5}\times y^{-4}\times x^{1}\times y^{-2}=x^{-5}\times x^{1}\times y^{-4}\times y^{-2}=x^{-5+1}\times y^{-4-2}=x^{-4}\times y^{-6}$$

Exercice04 : On pose : $A=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1) Montrer que : $A=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ 2) Montrer que : $\frac{(A-1)^{2}}{A}=\frac{6}{\sqrt{2}}$

3) En déduire que : $\frac{(A-1)^{4}}{A^{2}}\in\mathbb{N}$.

Corrigé : 1) Montrons que $A=\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

On a : $A=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right)}$

$$A=\frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}=\frac{1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{1^2+2\sqrt{2}\times1+\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2}$$

$$A=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

2) Montrons que : $\dfrac{(A-1)^2}{A}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

$$\frac{(A-1)^2}{A}=\frac{\left(\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-1\right)^2}{\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}=\frac{\left(\dfrac{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)^2}{\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{(A-1)^2}{A}=\dfrac{6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

3) Déduction que : $\dfrac{(A-1)^4}{A^2}\in\mathbb{N}$.

$$\frac{(A-1)^4}{A^2}=\left(\frac{(A-1)^2}{A}\right)^2=\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2=18\in\mathbb{N}$$

Exercice05 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=100x^3-25x$; $B=x^2-10x+25$; $C=2x^2-5$; $D=\left(x^2-1\right)(x-2)-(x-1)(5x+1)$

$E=4x^2+12x+9$; $F=(5x-1)(2x-3)-4x^2+9$; $G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)$

$H=4x^8-12x^4+9$ $\quad P=27x^3+8$; $K=8x^3+27-3\left(4x^2-9\right)-5(2x+3)$

$L=4a^2+b^2-x^2-4ab$; $M=y^2-y-4x^2+2x$

Corrigé : $A=25x^3-100x=25x\times x^2-25x\times4$ donc $25x$ facteur commun

Donc : $A=25x\left(x^2-4\right)=25x\left(x^2-2^2\right)=25x(x-2)(x+2)$

$B=x^2-10x+25$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

$B=x^2-2\times x\times5+5^2=(x-5)^2$

$C=2x^2-5$ est du type : a^2-b^2

$C=\left(\sqrt{2}x\right)^2-\sqrt{5}^2=\left(\sqrt{2}x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{5}\right)$

$D=\left(x^2-1\right)(x-2)-(x-1)(5x+1)=\left(x^2-1^2\right)(x-2)-(x-1)(5x+1)$

$D=(x+1)(x-1)(x-2)-(x-1)(5x+1)$ On a : $x-1$ facteur commun

Donc : $D=(x-1)\left[(x+1)(x-2)-(5x+1)\right]=(x-1)\left(x^2-2x+x-2-5x-1\right)=(x-1)\left(x^2-9x-3\right)$

$E=4x^2+12x+9$ est du type : $a^2+2ab+b^2$

$E=4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=(2x+3)^2$

$F=(5x-1)(2x-3)-4x^2+9$

$F=(5x-1)(2x-3)-(4x^2-9)=(5x-1)(2x-3)-\left((2x)^2-3^2\right)$ mais $(2x)^2-3^2$ est du type : a^2-b^2

Donc : $F=(5x-1)(2x-3)-(2x-3)(2x+3)$ On a : $2x-3$ facteur commun

Donc : $F=(2x-3)\left[(5x-1)-(2x+3)\right]=(2x-3)(5x-1-2x-3)=(2x-3)(3x-4)$

$G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)$

$G=(15x-5)(3x-5)-(6x-2)(7x-1)=5(3x-1)(3x-5)-2(3x-1)(7x-1)$

On a : $3x-1$ facteur commun

Donc : $G=(3x-1)\left[5(3x-5)-2(7x-1)\right]=(3x-1)(-15x-25-14x+2)=(3x-1)(-29x-23)$

$H=4x^8-12x^4+9=\left(2x^4\right)^2-2\times 2x^4\times 3+3^2$ est du type : $a^2-2ab+b^2$

Donc : $H=\left(2x^4-3\right)^2$

$P=27x^3+8=(3x)^3+2^3$ On a : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$

Donc : $P=(3x+2)\left(9x^2-6x+2^2\right)=(3x+2)\left(9x^2-6x+4\right)$

$K=8x^3-27-3\left(4x^2-9\right)-5(2x-3)$

$K=(2x)^3-3^3-3\left((2x)^2-3^2\right)-5(2x-3)$ et on a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc : $K=(2x-3)\left((2x)^2+6x+3^2\right)-3(2x-3)(2x+3)-5(2x-3)$ On a : $2x-3$ facteur commun

Donc : $K=(2x-3)\left[\left(4x^2+6x+9\right)-3(2x+3)-5\right]$

Donc : $K=(2x-3)\left(4x^2+6x+9-6x-9-5\right)$

Donc : $K=(2x-3)\left(4x^2-5\right)=(2x-3)\left((2x)^2-\sqrt{5}^2\right)=(2x-3)\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)$

$L=4a^2+b^2-x^2-4ab$

$L=\left(4a^2-4ab+b^2\right)-x^2$

$L=\left((2a)^2-2\times 2a\times b+b^2\right)-x^2=(2a-b)^2-x^2=(2a-b-x)(2a-b+x)$

$M=y^2-y-4x^2+2x$

$M=y^2-y-4x^2+2x=y^2-4x^2-(y-2x)$

$M=(y-2x)(y+2x)-(y-2x)\times 1$

Donc : $M=(y-2x)(y+2x-1)$.

Exercice06 : On pose : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$

1) Calculer : A^2

2)En déduire que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé : 1) $A^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$

$A^2 = 9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$A^2 = 2\times 9+2\sqrt{\left(9^2-\left(\sqrt{79}\right)^2\right)} = 18+2\sqrt{(81-79)} = 18+2\sqrt{2} = 18+\sqrt{8}$

2) Déduction que $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

$A^2 = 18+\sqrt{8}$ Signifie que : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $A=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$ mais on a : $A=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}>0$

Finalement : $A=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice07 : Soient x et y deux réels tels que : $\left|2x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ et $\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4}$

1) Montrer que : x et y appartiennent à l'intervalle : $\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifier que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

b) En déduire que : $-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

Corrigé :1) a) $\left|2x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2}<2x-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$

Signifie que : $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}<2x<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ Signifie que : $1<2x<2$

Signifie que : $1\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<2\times\frac{1}{2}$ Signifie que : $1\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<2\times\frac{1}{2}$

Signifie que : $\frac{1}{2}<x<1$ Signifie que : $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

b) $\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<y-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}<y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

Signifie que : $\frac{1}{2}<y<1$

Signifie que : $y\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) a) Vérifions que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

$xy-3x-2y-1=xy-2y-3x-1=(x-2)y-3x+6-6-1$

$xy-3x-2y-1=(x-2)y-3(x-2)-7$

$xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Remarque : la méthode la plus simple est de développer : $(x-2)(y-3)-7$

Est de trouver : $xy-3x-2y-1$

b) Déduisons que : $-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

On a : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Et on a : $\frac{1}{2}<x<1$ et $\frac{1}{2}<y<1$ donc : $\frac{1}{2}-2<x-2<1-2$ et $\frac{1}{2}-3<y-3<1-3$

Donc : $-\frac{3}{2}<x-2<-1$ et $-\frac{5}{2}<y-3<-2$

Donc : $1<-(x-2)<\frac{3}{2}$ et $2<-(y-3)<\frac{5}{2}$

Donc : $1\times 2<\left(-(x-2)\right)\times\left(-(y-3)\right)<\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}$

Donc : $2<(x-2)(y-3)<\frac{15}{4}$ Alors : $\boxed{-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}}$

Exercice08 : Soient $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$ tel que : $1<x<y$; on pose : $A=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ et $B=\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}$

1) Préciser le signe de A et B

2) a) Montrer que : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ b) Déduire que : $0<\frac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

3) Application : comparer : $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Corrigé : 1) Précisons le signe de A et B

On a : $1<x<y$ donc : $\sqrt{x}<\sqrt{y}$

Donc : $\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$ c'est-à-dire : $\boxed{A<0}$

On a : $1<x<y$ donc : $0<x-1<y-1$ Alors : $\sqrt{x-1}<\sqrt{y-1}$

Donc : $\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}<0$ c'est-à-dire : $\boxed{B<0}$

2) a) Montrons que : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x-1}^2-\sqrt{y-1}^2}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-1-y+1}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)\cancel{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$$

Donc : $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

b) Déduisons que : $0<\frac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

On a : $A<0$ et $B<0$ donc : $0<\frac{A}{B}$

Montrons que : $\frac{A}{B}<1$

$$1-\frac{A}{B}=1-\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$1-\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ Mais on a : $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>0$ eT $\sqrt{y}-\sqrt{y-1}>0$ ET $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

Donc : $1-\frac{A}{B}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$

Par suite : $0<\frac{A}{B}<1$ et donc : $\frac{A}{B}\times B>1\times B$ Car $B<0$

Donc : $\boxed{A>B}$

3) Application : comparons : $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

On a : $A>B$ C'est-à-dire : $\sqrt{x}-\sqrt{x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}$ si $1<x<y$

Prenons par exemple : $1<3<6$

On a donc : $\sqrt{3}-\sqrt{6}>\sqrt{3-1}-\sqrt{6-1}$ par suite : $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{6}>\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

Exercice09 : Dans **le** plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants : $A(-7;2)$; $B(-1;-6)$; $C(8;-5)$ et $E(-4;0)$

1) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des abscisses.

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D)\begin{cases}x=-5t-4\\y=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') parallèles a (D) passant par $A(-7;2)$

Solution :1) a) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ)

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+7;y-2)$ et $\vec{u}(3;-4)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix}x+7 & 3\\ y-2 & -4\end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-4(x+7)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-4x-28-3y+6=0$ Équivaut à : $-4x-3y-22=0$

Équivaut à : $-(4x+3y+22)=0$

Équivaut à : $4x+3y+22=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta):4x+3y+22=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(3;-4)$

Donc : $a=-4$ et $b=-3$ alors l'équation devient : (D) $-4x-3y+c=0$

Or on sait que $A(-7;2)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-4\times(-7)-3\times2+c=0$ c'est-à-dire : $28-6+c=0$ donc : $c=-22$

Par suite : $(\Delta):-4x-3y-22=0$ ou $(\Delta):4x+3y+22=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a : la droite (Δ) passe par $A(-7;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$ et $B(-1;-6)$

Alors : $4x_B+3y_B+22=4\times(-1)+3\times(-6)+22$

$=-4-18+22$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

Méthode2 : On a : : $(\Delta)\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$ et $B(-1;-6)$ alors : $\begin{cases} -1=3t-7 \\ -6=-4t+2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 6=3t \\ -8=-4t \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$)

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour t alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-4t+2 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} 3t-7=0 \\ y=-4t+2 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{7}{3} \\ y=-4t+2 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{7}{3} \\ y=-4\times\frac{7}{3}+2=-\frac{22}{3} \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{22}{3} \end{cases}$

par suite : $F\left(0;-\frac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

Méthode2 : On a : $(\Delta):4x+3y+22=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 4x+3y+22=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 4\times0+3y+22=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3y=-22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{22}{3} \end{cases}$ Par suite : $F\left(0;-\frac{22}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

e) On cherche les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases} x=3t-7 \\ y=-4t+2 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x = 3t-7 \\ y = 0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 3t-7 \\ -4t+2 = 0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 3t-7 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

$G(x;y) \in (\Delta) \cap (OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 3 \times \frac{1}{2} - 7 = -\frac{11}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

Méthode2 : On a : $(\Delta): 4x+3y+22=0$

$G(x;y) \in (\Delta) \cap (OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y = 0 \\ 4x+3y+22 = 0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y = 0 \\ 4x+3\times 0+22 = 0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y = 0 \\ 4x = -22 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\frac{11}{2};0\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante: $(D) \begin{cases} x = -5t-4 \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

Méthode1 : Soit $t \in \mathbb{R}$; on a : $(D) \begin{cases} x = -5t-4 \\ y = t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+4 = -5t \\ y = t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} \frac{x+4}{-5} = t \\ y = t \end{cases}$

Donc on obtient : $\frac{x+3}{6} = \frac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\frac{x+4}{-5} = y$ Équivaut à : $x+4 = -5y$ Équivaut à : $x+5y+4=0$

Équivaut à : (D) : $x+5y+4=0$

Méthode2 : on a : $(D) \begin{cases} x = -5t-4 \\ y = t \end{cases}$ Donc : la droite (D) passe par $E(-4;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-5;1)$ donc : Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme :

(Δ) $ax+by+c=0$; Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(-5;1)$

Donc : $a=1$ et $b=5$ alors l'équation devient : (D) $x+5y+c=0$

Or on sait que $E(-4;0)$ et $E \in (D)$

Donc : $-4+5\times 0+c=0$ c'est-à-dire : $-4+0+c=0$ donc : $c=4$ Par suite : (D) $x+5y+4=0$

C'est-à-dire après simplification : (D) : $x+5y+4=0$

2)b) Montrons que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

Méthode1 : On a : (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$

On a : $(D) \begin{cases} x = -5t-4 \\ y = t \end{cases}$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-5;1)$

Ou on a : (D) : $x+5y+4=0$: Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-5;1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}3 & -5\\ -4 & 1\end{vmatrix}=3\times1-(-4)\times(-5)=3-20=-17\neq 0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D) et (Δ) sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}(D): x+5y+4=0\\ (\Delta): 4x+3y+22=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x+5y=-4\\ 4x+3y=-22\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x+5y=-4 \quad (\times-4)\\ 4x+3y=-22 \quad (\times1)\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}-4x-20y=16\\ 4x+3y=-22\end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $-17y=-6$ Équivaut à : $y=\frac{6}{17}$

D'où : $x+5y=-4$ Équivaut à : $x=-5y-4$ Équivaut à : $x=-5\times\frac{6}{17}-4=-\frac{30}{17}-4=-\frac{98}{17}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{98}{17};\frac{6}{17}\right)\right\}$

Méthode2 : On a : $(\Delta): 4x+3y+22=0$ et on a : $(D)\ \begin{cases}x=-5t-4\\ y=t\end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=-5t-4\\ y=t\\ (\Delta): 4x+3y+22=0\end{cases}$ D'où : $4(-5t-4)+3t+22=0$

Équivaut à : $-20t-16+3t+22=0$

Équivaut à : $-17t+6=0$ Équivaut à : $-17t=-6$ Équivaut à : $t=\frac{6}{17}$

Donc : $\begin{cases}x=-5\times\frac{6}{17}-4=-\frac{30}{17}-4=-\frac{98}{17}\\ y=\frac{6}{17}\end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{98}{17};\frac{6}{17}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D') parallèles a (D) passant par $A(-7;2)$

On a : (D') passe par le point $A(-7;2)$ et parallèle a (D) et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de (D)

Donc : $\vec{v}(-5;1)$ est aussi un vecteur directeur de (D')

Donc : (D') passe par le point $A(-7;2)$ et $\vec{v}(-5;1)$ un vecteur directeur de (D')

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\ \begin{cases}x=-5t-7\\ y=t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien