Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

Exercice01 : Soit $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ Montrer que : E est nombre entier relatif

Corrigé : $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$

$E=\frac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{45}{-5}=-9\in\mathbb{Z}$

Exercice02 : $x\in\mathbb{R}$ Développer et calculer et simplifier : $A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

$B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2$ $C=\left(\sqrt{3}-1\right)^3$ $D=\left(2\sqrt{2}-3\right)^3$ $E=\left(x+3\right)\left(x^2-3x+9\right)$

$F=\left(202320232025\right)^2-202320232024\times202320232026$ (Lorsque la calculatrice tombe en panne)

$G=\left(5x+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(5x+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

Corrigé : $A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]-\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$

$A=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=4\sqrt{6}$

$B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2=\left[\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2\right)\right]^2=(7-5)^2=2^2=4$

$C=\left(\sqrt{3}-1\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3-3\times\left(\sqrt{3}\right)^2\times1+3\times\sqrt{3}\times1^2-1^3=3\sqrt{3}-3\times3\times1+3\times\sqrt{3}\times1-1$

$C=3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1=6\sqrt{3}-10$

$D=\left(2\sqrt{2}-3\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)^3-3\times\left(2\sqrt{2}\right)^2\times3+3\times2\sqrt{2}\times3^2-3^3=16\sqrt{2}-72+54\sqrt{2}-27$

$D=70\sqrt{2}-99$

$E=\left(x+3\right)\left(x^2-3x+9\right)$ on a : $\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$

Donc : $E=x^3+3^3=x^3+27$

$F=\left(202320232025\right)^2-202320232024\times202320232026$

On remarque que les nombres : 202320232024 et 202320232025 et 202320232026 différent par leurs chiffes des unités

Pour simplifier on pose : $x=202320232025$

Donc : $202320232026=x+1$ et $202320232024=x-1$

Donc : $F=x^2-\left(x-1\right)\left(x+1\right)=x^2-\left(x^2-1\right)=x^2-x^2+1=1$

Donc : $F=1$

$G=\left(5x+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(5x+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(\left(5x+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)\left(\left(5x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\right)=\left(5x+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{3}^2$

$G=\left(5x\right)^2+10x\sqrt{2}+2-3=25x^2+10x\sqrt{2}-1$

Exercice03 : Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=16x^2-8x+1$; $B=16-25x^2$; $C=1-(1-3x)^2$; $D=(2x-1)^3-8$; $E=27+x^3$; $F=x^{12}-2x^6+1$

$G=x^5+x^3-x^2-1$ $H=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)$; $M=x^4-49$; $N=a^2+b^2-x^2+2ab$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$; $K=(x-2)(3x-4)+x^3-8$; $R=x^2-6x+8$

$S=ax+ay-bx-by$; $U=a^2-a-x^2+x$; $V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

Corrigé : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$

$B=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$

$C=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$

$C=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$

$D=(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3$ On a : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Donc : $D=((2x-1)-2)((2x-1)^2+(2x-1)\times2+2^2)$

$D=(2x-3)((2x)^2-4x+1+4x-2+4)=(2x-3)(4x^2+3)$

$E=27+x^3=3^3+x^3=(3+x)(3^2-3x+x^2)$ Car : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$.

$E=(3+x)(9-3x+x^2)$

$F=(x^6)^2-2x^6+1=(x^6)^2-2x^6\times1+1^2=(x^6-1)^2$

$G=x^5+x^3-x^2-1=x^3(x^2+1)-(x^2+1)=(x^3-1)(x^2+1)$

$H=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)=x^3+1^3+2(x^2-1^2)-(x+1)$

$H=(x+1)(x^2-x+1^2)+2(x+1)(x-1)-(x+1)$

$H=(x+1)(x^2-x+1+2(x-1)-1)=(x+1)(x^2-x+1+2x-2-1)$

$H=(x+1)(x^2+x-2)$

$M=x^4-49=x^4-(\sqrt{7})^4=(x^2)^2-(\sqrt{7^2})^2$

$M=(x^2-\sqrt{7^2})(x^2+\sqrt{7^2})=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

$N=a^2+b^2-x^2+2ab=a^2+2ab+b^2-x^2=(a+b)^2-x^2$

Donc : $N=(a+b-x)(a+b+x)$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$

$L=(2x)^2-2\times2x\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})$

$L=(2x-\sqrt{5})^2+(1-2x)(2x-\sqrt{5})=(2x-\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}+1-2x)$ C'est-à-dire : $L=(2x-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$

$K=(x-2)(3x-4)+x^3-8=(x-2)(3x-4)+(x-2)(x^2+2x+4)$ $K=(x-2)(3x-4+x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+5x)=x(x-2)(x+5)$

$R=x^2-6x+8=x^2-6x+9-1=x^2-2\times3x+3^2-1$

$R=(x-3)^2-1^2=(x-3-1)(x-3+1)=(x-4)(x-2)$

$S=ax+ay-bx-by=a(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b)$

$U=a^2-a-x^2+x=a^2-x^2-(a-x)$

PROF: ATMANI NAJIB

$U=(a-x)(a+x)-(a-x)\times 1$ Donc : $U=(a-x)(a+x-1)$.

$V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

$V=\left(a^4+2a^2b^2+b^4\right)-\left(x^4-4abx^2+4a^2b^2\right)$

$V=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(x^2-2ab\right)^2=\left(a^2+b^2+x^2-2ab\right)\left(a^2+b^2-x^2+2ab\right)$

Exercice04 : On pose : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Déterminer le signe de B

2) Calculer B^2.

3) En déduire une écriture simple de B.

Corrigé : 1) On a : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Et on Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ et par suite : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ est négatif

C'est à dire que : $B<0$

2) $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$B^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-20}=12-2\sqrt{16}=12-2\times 4=4$

4) $B^2=4$ Equivalent à : $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Equivalent à : $B=2$ ou $B=-2$ or on a : $B<0$ Donc : $B=-2$.

Exercice05 : On pose : $a=\sqrt{19+6\sqrt{10}}$ et $b=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$

1) Montrer que : $a\times b=1$

2) On pose : $u=a+b$ et $v=a-b$ Calculer : u^2 et v^2

3) En déduire une écriture simple de u et v

4) En déduire une écriture simple de a et b

Corrigé : $ab=\sqrt{19+6\sqrt{10}}\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{\left(19+6\sqrt{10}\right)\left(19-6\sqrt{10}\right)}$

$ab=\sqrt{19^2-\left(6\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{361-360}=\sqrt{1}=1$

2) On a : $u=a+b$ et $V=a-b$

Donc : $u^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+b^2+2\times 1$

Donc ; $u^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}+2\times 1=40$

Et : $v^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=a^2+b^2-2\times 1$

Donc : $v^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}-2\times 1=36$

3) Déduction d'une écriture simple de u et v :

On a : $u^2=40$ donc : $u=\sqrt{40}$ ou $u=-\sqrt{40}$

Or on sait que : $u=a+b$ donc u est la somme de deux nombres positifs donc c'est un nombre positif

Donc : $u=\sqrt{40}=\sqrt{4\times 10}=2\sqrt{10}$

On a aussi : $v^2=36$ et on Remarque que : $a>b$ donc : v est positif par suite : $v=\sqrt{36}=6$

4) Déduire une écriture simple de a et b :

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\begin{cases} u = 2\sqrt{10} \\ v = 6 \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} a+b = 2\sqrt{10} \\ a-b = 6 \end{cases}$

En faisant la somme membre à membre les deux équations : On trouve : $2a = 6 + 2\sqrt{10}$

Donc : $a = \dfrac{6+2\sqrt{10}}{2} = 3+\sqrt{10}$

Et on a : $a+b = 2\sqrt{10}$ donc: $b = 2\sqrt{10} - a$ Equivaut à : $b = 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{10}$ par suite : $b = \sqrt{10} - 3$

Exercice06 : Comparer a et b dans les cas suivants :1

1) $b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$ et $a = \sqrt{10}$ 2) $b = 70 + \sqrt{2}$ et $a = 10\sqrt{51}$

3) $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

Corrigé : 1) On compare : $a = \sqrt{10}$ et $b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$

On calcul la différence : $a - b = \sqrt{10} - \left(\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{5\times 2} - \left(\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1\right)$

$a - b = \sqrt{5}\times\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{5}\times\left(\sqrt{2}-1\right) - \left(\sqrt{2}-1\right)$

On factorise par : $\sqrt{5}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a - b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

On a : $\sqrt{2} > 1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et $(1)^2 = 1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Et on a: $\sqrt{5} > 1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ et $1^2 = 1$ donc : $\left(\sqrt{5}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a - b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a > b$

2) On compare : $a = 10\sqrt{51}$ et $b = 70 + \sqrt{2}$

Puisque a et b sont positifs il suffit de comparer

a^2 et b^2 : on a $a^2 = \left(10\sqrt{51}\right)^2 = 5100$ $b^2 = \left(70+\sqrt{2}\right)^2 = 4900 + 140\sqrt{2} + 2 = 4902 + 140\sqrt{2}$

$a^2 - b^2 = 198 - 140\sqrt{2} = 2\left(99 - 70\sqrt{2}\right)$

Et on a : $(99)^2 = 9801$ et $\left(70\sqrt{2}\right)^2 = 9800$

Donc : $99 - 70\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*}$

Equivaut à : $2\left(99 - 70\sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a^2 - b^2 > 0$ donc $a > b$ ($a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$)

3) On compare : $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$? $b - a = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7} - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7} - \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$

$b - a = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7} - \dfrac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $b - a = \dfrac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14} = \dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

On a : $8 > 5\sqrt{2}$ car $(8)^2 = 64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$ donc : $8 - 5\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc on a aussi : $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14} \in \mathbb{R}^{+*}$ Par suite : $b > a$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice07 : Soient : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$. On pose : $E=x^2-y^2+2x+2y$

1) Trouver un encadrement de E : et déterminer son amplitude.

2) Vérifier que : $E=(x+y)(x-y+2)$ et en déduire un autre encadrement de et comparer les amplitudes des deux encadrements. E

3) En déduire que : $4\le E\le 9$.

Corrigé :1) Encadrement de : $E=x^2-y^2+x+y$

On a : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$ donc : $1\le x^2\le 9$ et $\frac{1}{4}\le y^2\le 1$ donc : $-1\le -y^2\le -\frac{1}{4}$

Et on a : $2\le 2x\le 6$ et $1\le 2y\le 2$

Donc : $1+-1+2+2\le x^2-y^2+x+y\le 9+\left(-\frac{1}{4}\right)+6+2$

Ce qui signifie que : $4\le E\le \frac{67}{4}\ (\alpha)$ son amplitude est : $\frac{67}{4}-4=\frac{51}{4}=12,75$

2) On a : $E=x^2-y^2+2x+2y$

Donc : $E=(x+y)(x-y)+2(x+y)$ et par suite : $E=(x+y)(x-y+2)$

Déduction : on a : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$.

Donc : $\frac{3}{2}\le x+y\le 4\ (1)$

Et on a : $-1\le -y\le -\frac{1}{2}$ donc : $1-1\le x-y\le 3-\frac{1}{2}$ ce qui signifie que : $0\le x-y\le \frac{5}{2}$

Par suite on a : $2\le x-y+2\le \frac{9}{4}\ (2)$

De (1) et (2) on déduit que : $3\le (x+y)(x-y+2)\le 9$

Ce qui signifie que : E donc c'est un autre encadrement de $(\beta)\ 3\le E\le 9$

Son amplitude est : $9-3=6<12,75$

3) Déduction que : $4\le E\le 9$.

On a : $\boxed{4\le E\le \frac{67}{4}}$ et $\boxed{3\le E\le 9}$

Donc : $E\in\left[4;\frac{67}{4}\right]\ (1)$ et $E\in[3;9]\ (2)$

Donc : $E\in\left[4;\frac{67}{4}\right]\cap[3;9]$

Donc : $E\in[4;9]$ c'est-à-dire : $4\le E\le 9$

Exercice08 : 1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifier : $A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

2) Simplifier les nombres : $B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$; $C=\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$; $D=\left|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right|$ et $E=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Simplifier : $F=\sqrt{(3b-1)^2}$; $G=\sqrt{(a-5)^2}$

4) Résoudre les équations : a) $|5x+2|=8$ b) $|-2x+1|=-1$ c) $|2x+1|=|3x-4|$

PROF: ATMANI NAJIB

5) Résoudre les inéquations : a) $|2x-3|\leq 1$ b) $|6x+11|\geq \frac{1}{6}$ c) $2\leq |10x+2|\leq 5$

Corrigé : 1) Soient x et y deux réels tels que : $x\in[-2;5]$ et $y\in[-3;-1]$

Simplifions : $A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

$A=2|2x+7|-|3y|+2|y+8|-|2y-x|$

1) On a : $x\in[-2;5]$ donc : $-2\leq x\leq 5$

Donc : $-4\leq 2x\leq 10$ alors : $3\leq 2x+7\leq 17$ c'est-à-dire : $2x+7>0$ Donc : $|2x+7|=2x+7$

2) On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\leq y\leq -1$ alors : $-9\leq 3y\leq -3$ c'est-à-dire : $3y<0$

Donc : $|3y|=-3y$

3) On a : $y\in[-3;-1]$ donc : $-3\leq y\leq -1$ alors : $5\leq y+8\leq 7$ c'est-à-dire : $y+8>0$

Donc : $|y+8|=y+8$

4) On a : $-3\leq y\leq -1$ alors : $-6\leq 2y\leq -2$ et $-5\leq -x\leq 2$

Alors : $-6+(-5)\leq 2y+(-x)\leq -2+2$ c'est-à-dire : $-11\leq 2y-x\leq 0$ donc : $2y-x\leq 0$

Donc : $A=2(2x+7)+3y+2(y+8)+2y-x$

Donc : $A=4x+14+3y+2y+16+2y-x$

Donc : $\boxed{A=3x+7y+30}$

2) Simplifions : $B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}$

$B=\sqrt{\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)^2}=|5\sqrt{7}-59\sqrt{3}|$

On a : $\left(5\sqrt{7}\right)^2=175$; $\left(59\sqrt{3}\right)^2=10443$ donc : $5\sqrt{7}-59\sqrt{3}<0$

Alors : $B=-\left(5\sqrt{7}-59\sqrt{3}\right)=59\sqrt{3}-5\sqrt{7}$

Simplifions : $C=|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$; $\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ donc : $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}>0$

Alors : $C=|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

Simplifions : $D=|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}|$

$D=|-5\sqrt{13}-13\sqrt{5}|=|-(5\sqrt{13}+13\sqrt{5})|=|5\sqrt{13}+13\sqrt{5}|$ car $|-X|=|X|$

Alors : $D=5\sqrt{13}+13\sqrt{5}$ Car : $5\sqrt{13}+13\sqrt{5}>0$

Simplifions : $E=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$E=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\sqrt{3}+2^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$ car $\sqrt{3}-2<0$

3) Soient a et b deux réels tels que : $a\in\mathbb{R}^-$ et $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

Simplifions : $F=\sqrt{(3b-1)^2}$

$F=\sqrt{(3b-1)^2}=|3b-1|$ Or on a : $b\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

$b \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ Signifie que : $0 \le b \le \frac{1}{3}$

Donc : $0 \le 3b \le 1$ c'est-à-dire : $-1 \le 3b-1 \le 0$

Donc : $F = |3b-1| = -(3b-1) = 1-3b$

Simplifions : $G = \sqrt{(a-5)^2} = |a-5|$

$a \in \mathbb{R}^-$ Signifie que : $a \le 0$ c'est-à-dire : $a-5 \le -5$

Donc : $a-5 \le 0$

Donc : $G = |a-5| = -(a-5) = 5-a$

4) a) Résolution de l'équation : $|5x+2| = 8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2| = 8$ Signifie que : $5x+2 = 8$ ou $5x+2 = -8$

Signifie que : $5x = 6$ ou $5x = -10$

Signifie que : $x = \frac{6}{5}$ ou $x = -2$

Donc : $S = \left\{-2;\frac{6}{5}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-2x+1| = -1$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative

Donc : $S = \varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1| = |3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|2x+1| = |3x-4|$ Signifie que : $2x+1 = 3x-4$ ou $2x+1 = -(3x-4)$

Signifie que : $-x = -5$ ou $2x+1 = -3x+4$

Signifie que : $x = 5$ ou $5x = 3$

Signifie que : $x = 5$ ou $x = \frac{3}{5}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{5};5\right\}$

5)a) Résolution de l'inéquation : $|2x-3| \le 1$

Règle : $|x-a| \le r$ **est équivalente à :** $-r \le x-a \le r$ avec $r > 0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x-3| \le 1$ Signifie que : $-1 \le 2x-3 \le 1$

Signifie que : $-1+3 \le 2x-3+3 \le 1+3$

Signifie que : $2 \le 2x \le 4$

Signifie que : $1 \le x \le 2$

Donc : $S = [1;2]$

b) Résolution de l'inéquation : $|6x+11| \ge \frac{1}{6}$

Règle : $|x-a| > r$ **est équivalente à :** $x-a \ge r$ ou $x-a \le -r$ avec $r > 0$

PROF: ATMANI NAJIB

$|6x+11| \geq \frac{1}{6}$ Signifie que : $6x+11 \geq \frac{1}{6}$ ou $6x+11 \leq -\frac{1}{6}$

Signifie que : $6x \geq \frac{1}{6}-11$ ou $6x \leq -\frac{1}{6}-11$

Signifie que : $6x \geq -\frac{65}{6}$ ou $6x \leq -\frac{67}{6}$

Signifie que : $x \geq -\frac{65}{36}$ ou $x \leq -\frac{67}{36}$

Donc : $S = \left]-\infty;-\frac{67}{36}\right] \cup \left[-\frac{65}{36};+\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2 \leq |10x+2| \leq 5$

$2 \leq |10x+2| \leq 5$ Signifie que : $|10x+2| \leq 5$ et $|10x+2| \geq 2$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2| \leq 5$

$|10x+2| \leq 5$ Signifie que : $-5 \leq 10x+2 \leq 5$

Signifie que : $-5-2 \leq 10x+2-2 \leq 5-2$

Signifie que : $-7 \leq 10x \leq 3$

Signifie que : $-\frac{7}{10} \leq x \leq \frac{3}{10}$

Donc : $S_1 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right]$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2| \geq 2$

$|10x+2| \geq 2$ Signifie que : $10x+2 \geq 2$ ou $10x+2 \leq -2$

Signifie que : $10x \geq 0$ ou $10x \leq -4$

Signifie que : $x \geq 0$ ou $x \leq -\frac{2}{5}$

Donc : $S_2 = \left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup [0;+\infty[\right)$

Donc : $S = \left[-\frac{7}{10};-\frac{2}{5}\right] \cup \left[0;\frac{3}{10}\right]$

Exercice09 : Soit : $x \in \mathbb{R}$; on pose : $A = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Montrer que : $A-\frac{1}{2} = \frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$

2) En déduire que : $\left|A-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}x^2$.

3) Trouver une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

PROF: ATMANI NAJIB

Corrigé : 1) $A-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{2}$

$$A-\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{2\sqrt{x^2+4}\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=\frac{2^2-\sqrt{x^2+4}^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}^2\right)}$$

$$A-\frac{1}{2}=\frac{4-x^2-4}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}=\frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$$

2) Déduisons que : $\left|A-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}x^2$.

On a : $A-\frac{1}{2}=\frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$ donc :

$$\left|A-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{-x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}\right|=\frac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}$$

Car x^2 *et* $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)$ sont positifs

On a : $x^2\ge 0$ donc : $x^2+4\ge 4$ donc : $\sqrt{x^2+4}\ge\sqrt{4}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2+4}\ge 2$ donc $2\sqrt{x^2+4}\ge 4$

De : $2\sqrt{x^2+4}\ge 4$ et $x^2+4\ge 4$ par somation on a donc : $2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\ge 8$

Donc : $2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)\ge 16$

Donc : $\frac{1}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}\le\frac{1}{16}$

Donc : $\frac{x^2}{2\left(2\sqrt{x^2+4}+x^2+4\right)}\le\frac{1}{16}x^2$

D'où : $\left|A-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}x^2$

3) Trouvons une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

On a : $\left|A-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}x^2$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}x^2$

Prenons : $x=0,4$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{0,4^2+4}}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}\times0,4^2$ ce qui signifie que : $\left|\frac{1}{\sqrt{4,16}}-0.5\right|\le10^{-2}$

D'où 0.5 est une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{4,16}}$ d'amplitude 10^{-2}

Exercice10 : Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points Suivants : $A(-1;2)$; $B(5;-2)$; $C(6;3)$ et $E(-2;-3)$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe des abscisses.

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D)

b) Montrer que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(6;3)$

Solution :1) a) Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ)

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ et $\vec{u}(3;-2)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix}x+1 & 3\\ y-2 & -2\end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-2(x+1)-3(y-2)=0$

Équivaut à : $-2x-2-3y+6=0$ Équivaut à : $-2x-3y+4=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $(\Delta):-2x-3y+4=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : $(\Delta)\ ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(3;-2)$

Donc : $a=-2$ et $b=-3$ alors l'équation devient : (D) $-2x-3y+c=0$

Or on sait que $A(-1;2)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-2\times(-1)-3\times2+c=0$ c'est-à-dire : $2-6+c=0$ donc : $c=4$

Par suite : $(\Delta):-2x-3y+4=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite (Δ)

On a : (Δ) la droite passe par $A(-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\y=-2t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

Méthode1 : On a : $B(5;-2)$ alors : $-2x_B-3y_B+4=-2\times5-3\times(-2)+4$

$=-10+6+4$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

PROF: ATMANI NAJIB

Méthode2 : On a : : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\y=-2t+2\end{cases}$ et $B(5;-2)$ alors : $\begin{cases}5=3t-1\\-2=-2t+2\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}6=3t\\-4=-2t\end{cases}$ signifie que : $\begin{cases}t=2\\t=2\end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$)

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour t alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point F d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\y=-2t+2\end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\y=-2t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}3t-1=0\\y=-2t+2\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\y=-2t+2\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\y=-2\times\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$ par suite : $F\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

Méthode2 : On a : $(\Delta): -2x-3y+4=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\-2x-3y+4=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\-2\times0-3y+4=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\-3y=-4\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=0\\y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Par suite : $F\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OY)

e) On cherche les coordonnées du point G d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX).

Méthode1 : On a : $(\Delta)\begin{cases}x=3t-1\\y=-2t+2\end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=3t-1\\y=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=3t-1\\-2t+2=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=3t-1\\t=1\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x=3\times1-1=2\\y=0\end{cases}$

Par suite : $G(2;0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

Méthode2 : On a : $(\Delta): -2x-3y+4=0$

PROF: ATMANI NAJIB

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases}y=0\\-2x-3y+4=0\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=0\\-2x-3\times0+4=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}y=0\\-2x=-4\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}y=0\\x=2\end{cases}$

Par suite : $G(2;0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et l'axe (OX)

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (D)

Méthode1 : Soit $t\in\mathbb{R}$; on a : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x+2=8t\\y+3=6t\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}\dfrac{x+2}{8}=t\\\dfrac{y+3}{6}=t\end{cases}$

Donc on obtient : $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y+3}{6}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $6(x+2)=8(y+3)$

Équivaut à : $6(x+2)=8(y+3)$

Équivaut à : $6x+12=8y+24$

Équivaut à : $6x-8y-12=0$

Équivaut à : $2(3x-4y-6)=0$

Équivaut à : (D) : $3x-4y-6=0$

Méthode2 : on a : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$

Donc : la droite (D) passe par $E(-2;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(8;6)$

Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : (Δ) $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(8;6)$

Donc : $a=6$ et $b=-8$ alors l'équation devient : (D) $6x-8y+c=0$

Or on sait que $E(-2;-3)$ et $E\in(D)$

Donc : $6\times(-2)-8\times(-3)+c=0$ c'est-à-dire : $-12+24+c=0$ donc : $c=-12$

Par suite : (D) $6x-8y-12=0$

C'est-à-dire après simplification : (D) : $3x-4y-6=0$

2)b) Montrons que les droites (D) et (Δ) sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

Méthode1 : On a : (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\boxed{\vec{u}(3;-2)}$

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$: **Un** vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(8;6)$

Ou On a : (D) : $3x-4y-6=0$: **Un** vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(4;3)$

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}3 & 8\\-2 & 6\end{vmatrix}=3\times 6-(-2)\times 8=18+16=34\neq 0$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (D) et (Δ) sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}(D):3x-4y-6=0\\(\Delta):-2x-3y+4=0\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}3x-4y=6\\-2x-3y=-4\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}3x-4y=6 & (\times 2)\\2x+3y=4 & (\times -3)\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}6x-8y=12\\-6x-9y=-12\end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $6x-8y-6x-9y=0$

Équivaut à : $17y=0$ Équivaut à : $y=0$

D'où : $3x-4y=6$ Équivaut à : $3x-4\times 0=6$ Équivaut à : $3x=6$ Équivaut à : $x=2$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\{M(2;0)\}$

Méthode1 : On a : $(\Delta):-2x-3y+4=0$ et on a : $(D)\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases}x=8t-2\\y=6t-3\\(\Delta):-2x-3y+4=0\end{cases}$

D'où : $-2(8t-2)-3(6t-3)+4=0$ Équivaut à : $-16t+4-18t+9+4=0$

Équivaut à : $-34t+17=0$ Équivaut à : $-34t=-17$ Équivaut à : $t=\frac{1}{2}$

Donc : $\begin{cases}x=8\times\frac{1}{2}-2=4-2=2\\y=6\times\frac{1}{2}-3=3-3=0\end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\{M(2;0)\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D') parallèles a (D) passant par $C(6;3)$

On a : (D') passe par le point $C(6;3)$ et parallèle a (D) et $\vec{v}(4;3)$ un vecteur directeur de (D)

Donc : $\vec{v}(4;3)$ est aussi un vecteur directeur de (D')

Donc : (D') passe par le point $C(6;3)$ et $\vec{v}(4;3)$ un vecteur directeur de (D')

Donc : une représentation paramétrique de la droite (D') est : $(D')\begin{cases}x=4t+6\\y=3t+3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB