Tronc commun Sciences BIOF

# *Correction :* Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :

- **L'ensemble des nombres réels et sous-ensembles**
- **L'ordre dans $\mathbb{R}$**
- **La droite dans le plan**

**Exercice01 :** Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$ ; $\notin$ ; $\subset$ ; $\not\subset$

$2,5...\mathbb{Z}$ ; $-2...\mathbb{Q}$ ; $\sqrt{3}...\mathbb{Q}$ ; $\mathbb{R}_+^*....\mathbb{R}$ ; $\sqrt{3}....\mathbb{R}$ ; $-\frac{\sqrt{100}}{5}....\mathbb{Z}$ ; $-\sqrt{7}...\mathbb{R}^-$ ; $-\frac{12}{5}...\mathbb{Q}^{*+}$ ; $\frac{1}{3}....D$ ;

$0....\mathbb{N}^*$ ; $\{0;-2;11;-2023\}...\mathbb{Z}$ ; $1....\{0;2;3\}$ ; $0...\varnothing$ ; $\left\{-\frac{3}{2};\sqrt{2};2025\right\}...\mathbb{Q}$ ; $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{.....\}$ ;

$\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-=.....$ ; $3...[3;5[$ ; $\frac{1}{2}...\left[0;\frac{1}{2}\right[$ ; $-1...[1;+\infty[$ ; $2025....[100;+\infty[$ ; $\frac{1}{2}....]-1;1]$ ;

$\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}...[0;3[$ ; $\{0;1;2025\}...]0;+\infty[$ ; $]0;2[....\mathbb{Q}$ ; $]-2;+\infty[\cap]-\infty;0]=....$ ; $[-2;5[\cup]4;2025]=....$

$]-\infty;0]\cap]0;+\infty]=....$

**Corrigé :** $2,5\notin\mathbb{Z}$ ; $-2\in\mathbb{Q}$ ; $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ ; $\mathbb{R}_+^*\subset\mathbb{R}$ ; $\sqrt{3}\in\mathbb{R}$ ; $-\frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{Z}$ car :

$-\frac{\sqrt{100}}{5}=-\frac{10}{5}=-2\in\mathbb{Z}$

; $-\sqrt{7}\in\mathbb{R}^-$ ; $-\frac{12}{5}\notin\mathbb{Q}^{*+}$ ; $\frac{1}{3}\notin D$ ; $0\notin\mathbb{N}^*$ ; $\{0;-2;11;-2023\}\subset\mathbb{Z}$ ; $1\in\{0;2;3\}$ ; $0\notin\varnothing$ ;

$\left\{-\frac{3}{2};\sqrt{2};2025\right\}\not\subset\mathbb{Q}$ ; $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{0\}$ ; $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-=\mathbb{R}$ $3...[3;5[$ ; $\frac{1}{2}...\left[0;\frac{1}{2}\right[$ ; $-1...[1;+\infty[$ ;

$2025....[100;+\infty[$ ; $\frac{1}{2}\in]-1;1]$ ; $\left\{0;\frac{1}{2};1;2\right\}\subset[0;3[$ ; $\{0;1;2025\}\not\subset]0;+\infty[$ ; $]0;2[\not\subset\mathbb{Q}$ ;

$]-2;+\infty[\cap]-\infty;0]=]-2;0]$ ; $[-2;5[\cup]4;2025]=....[-2;2025]$ ; $]-\infty;0]\cap]0;+\infty]=\varnothing$

**Exercice02 :** Calculer et simplifier : 1) $A=\dfrac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$ 2) $B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2$

3) $C=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

4) $D=(202320232025)^2-202320232024\times202320232026$ (Lorsque la calculatrice tombe en panne)

5) $E=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 6) $F=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$ 7) $G=\frac{(-10)^9\times(-6)^3}{(-25)^4\times3\times(-2)^{11}}$

**Corrigé :** 1) $$A=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{3-1}{3}+\frac{3}{3+1}}{\frac{3+1}{3}-\frac{3}{3-1}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{17}{12}}{-\frac{1}{6}}=\frac{17}{12}\times-6=-\frac{17}{2}$$

2) $B=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]^2=\left[\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2\right)\right]^2=(7-5)^2=2^2=4$

3) $C=\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2=\left[\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{5}\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right]-\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right]$

$C=\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\times\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}\right)^2=2\sqrt{7}\times\sqrt{5}+2\sqrt{7}\times\sqrt{5}=4\sqrt{35}$

4) $D=(202320232025)^2-202320232024\times202320232026$

On remarque que les nombres : $202320232024$ et $202320232025$ et $202320232026$ différent par leurs chiffes des unités

Pour simplifier on pose : $x=202320232025$

Donc : $202320232026=x+1$ et $202320232024=x-1$

$D=x^2-(x-1)\times(x+1)=x^2-\left(x^2-1^2\right)=x^2-x^2+1=1$

Donc : $D=1$

5) $$E=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$E=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$E=\frac{-4\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{5-2}=\frac{-4}{3}\sqrt{10}$$

6) $$F=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$$

$$a=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}=\frac{2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}\quad a=\frac{2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{4}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$$

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}\quad b=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

$$c=\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}\quad c=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{3-11}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{-8}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$$

Donc : $F=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}=a+b+c$

Donc : $F=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ .

7) $$G=\frac{(-10)^9\times(-6)^3}{(-25)^4\times3\times(-2)^{11}}=\frac{-10^9\times-6^3}{25^4\times3\times-2^{11}}=-\frac{10^9\times6^3}{25^4\times3\times2^{11}}$$

$$G=-\frac{(5\times2)^9\times(3\times2)^3}{\left(5^2\right)^4\times3\times2^{11}}=-\frac{5^9\times2^9\times3^3\times2^3}{5^8\times3^1\times2^{11}}=-\frac{5^9\times2^{9+3}\times3^3}{5^8\times3^1\times2^{11}}=-5^9\times2^{12}\times3^3\times5^{-8}\times3^{-1}\times2^{-11}$$

$$G=-5^{9-8}\times2^{12-11}\times3^{3-1}=-5\times2\times9=-10\times9=-90$$

**Exercice03 : Monter** que : $A=\frac{\sqrt{60}\times\sqrt{21}}{2\sqrt{35}}\in\mathbb{N}$

**Corrigé :** On a : $A=\frac{\sqrt{60}\times\sqrt{21}}{2\sqrt{35}}=\frac{\sqrt{5\times3\times4}\times\sqrt{3\times7}}{2\sqrt{5\times7}}=\frac{2\times3\sqrt{5\times7}}{2\sqrt{5\times7}}=3\in\mathbb{N}$

**Exercice04 :** On pose : $A=500\left(\frac{2+22+222+2222}{5+55+555+5555}\right)^2$ Montrer que : $A\in\mathbb{N}$

**Corrigé :** $A=500\left(\frac{2+22+222+2222}{5+55+555+5555}\right)^2=500\left(\frac{2(1+11+111+1111)}{5(1+11+111+1111)}\right)^2=500\left(\frac{2}{5}\right)^2$

Donc : $A=500\times\frac{4}{25}=80\in\mathbb{N}$

**Exercice05 :** Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $x^2-3x-8=0$ et $x>3$

Monter que : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)\in\mathbb{Q}$

**Corrigé :** $x^2-3x-8=0$ implique $x(x-3)=8$

C'est-à-dire : $x-3=\frac{8}{x}$

D'où $\frac{x-3}{x}=\frac{8}{x^2}$ et $\frac{x}{x-3}=\frac{x^2}{8}$

Par suite : $\sqrt{\frac{x-3}{x}}=\sqrt{\frac{8}{x^2}}=\frac{\sqrt{8}}{x}$ et $\sqrt{\frac{x}{x-3}}=\sqrt{\frac{x^2}{8}}=\frac{x}{\sqrt{8}}$ car $x>3>0$

Donc : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{8}}{x}-\frac{x}{\sqrt{8}}\right)$

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{x}-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{x}-\frac{x}{4}=\frac{8-x^2}{4x}$$

Or : $x^2-3x-8=0$ implique $-3x=8-x^2$

Donc : $A=\frac{-3x}{4x}=\frac{-3}{4}\in\mathbb{Q}$

**Exercice06 :** Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\sqrt{a+12}+\sqrt{a}=3$

1) Donner la valeur de l'expression : $\sqrt{a+12}-\sqrt{a}$ sans calculer $a$

2) Déterminer la valeur de $a$ .

**Corrigé :** 1) On va multiplier par l'expression conjuguée de l'expression $\sqrt{a+12}+\sqrt{a}$ qui est :
$\sqrt{a+12}-\sqrt{a}$

Donc : $\sqrt{a+12}-\sqrt{a}=\dfrac{\left(\sqrt{a+12}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+12}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a+12}+\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt{a+12}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{a+12}+\sqrt{a}}$

Donc : $\sqrt{a+12}-\sqrt{a}=\dfrac{a+12-a}{\sqrt{a+12}+\sqrt{a}}=\dfrac{12}{3}=4$

2) Détermination de la valeur de $a$ :

On a : $\begin{cases}\sqrt{a+12}+\sqrt{a}=3 & (1)\\ \sqrt{a+12}-\sqrt{a}=4 & (2)\end{cases}$ donc : par sommation $(1)+(2)$ on a : $2\sqrt{a+12}=7$

Donc : $\sqrt{a+12}=\dfrac{7}{2}$ ce qui équivaut à : $\left(\sqrt{a+12}\right)^2=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2$ C'est-à-dire : $a+12=\dfrac{49}{4}$

Donc : $a=\dfrac{49}{4}-12=\dfrac{49-48}{4}=\dfrac{1}{4}$

**Exercice07 :** On pose : $A=\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}$

1) Calculer : $A^2$

2)En déduire que : $A=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

**Corrigé :** 1) $A^2=\left(\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$$A^2=\frac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\frac{6-\sqrt{31}}{2}$$

$$A^2=\frac{6+\sqrt{31}+6-\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\frac{\left(6^2-\left(\sqrt{31}\right)^2\right)}{4}}=6+\frac{2}{2}\sqrt{(36-31)}=6+\sqrt{5}$$

2) Déduction que $A=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

$A^2=6+\sqrt{5}$ Signifie que : $A=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $A=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$ mais on a : $A=\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}>0$

Finalement : $A=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

**Exercice08 :** On pose : $Y=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Déterminer le signe de $Y$

2) Calculer $Y^2$.

3) En déduire une écriture simple de $Y$.

**Corrigé :** 1) On a : $Y=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Et on Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ et par suite : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ est négatif

C'est à dire que : $Y<0$

2) $Y^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$$X^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$Y^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$$

$Y^2 = 12 - 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$X^2 = 12 - 2\sqrt{36-20} = 12 - 2\sqrt{16} = 12 - 8 = 4$

3) $Y^2 = 4$ Equivalent à: $Y = \sqrt{4}$ ou $Y = -\sqrt{4}$

Equivalent à : $Y = 2$ ou $Y = -2$ or on a : $Y < 0$ Donc : $Y = -2$.

**Exercice09 :** $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$ et $a \geq b$

Montrer que : $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)$

**Corrigé :** Pour montrer que deux nombres positifs sont égaux on pourra montrer que leurs carrés sont égaux :On a : $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)^2 = \frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)^2 = \frac{1}{2}\times\left(\left(\sqrt{a-b}\right)^2 + 2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b} + \left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)^2 = \frac{1}{2}\times\left(a-b+2\sqrt{(a-b)(a+b)}+a+b\right) = \frac{1}{2}\times\left(2a+2\sqrt{(a-b)(a+b)}\right) = a + \sqrt{(a-b)(a+b)} = a + \sqrt{a^2-b^2}$$

Donc on a : $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)\right)^2$

Par suite/ $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}\right)$

**Exercice10 :** Factorisez les expressions suivantes :

$A = 16x^2 - 8x + 1$ ; $B = 8x^3 - 1$ ; $C = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ ; $D = x^4 - 49$ ; $E = x^3 - 64$ ; $F = x^3 + 27 + 2\left(x^2 - 9\right) - 3x - 9$

$G = x^3 + 125 + 5\left(x^2 - 25\right)$ ; $H = x^6 + 2x^3 + 1$ . ; $N = a^2 + 4b^2 - x^2 + 4ab$ ; $S = 3ax + 3ay - 2bx - 2by$

**Corrigé :** $A = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2\times 4x \times 1 + 1^2 = (4x-1)^2$

Pour $B = 8x^3 - 1$ on Remarque que : $B = 8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3$ identité remarquable du type :

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$B = (2x-1)\left((2x)^2 + 2x\times 1 + 1^2\right) = (2x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right)$

$C = x^3\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^3-1^3\right)$

$C = \left(x^2+1\right)(x-1)\left(x^2 - x\times 1 + 1^2\right) = \left(x^2+1\right)(x-1)\left(x^2-x+1\right)$

$D = x^4 - 49 = x^4 - \left(\sqrt{7}\right)^4 = \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{7}^2\right)^2$

$D = \left(x^2 - \sqrt{7}^2\right)\left(x^2 + \sqrt{7}^2\right) = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)\left(x^2 + 7\right)$

$E = x^3 - 64 = x^3 - 4^3$ On a : Car : $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Donc : $E = (x-4)\left(x^2 + 4x + 4^2\right)$

Donc : $E = (x-4)\left(x^2 + 4x + 16\right)$

$F = x^3 + 27 + 2\left(x^2 - 9\right) - 3x - 9 = x^3 + 3^3 + 2\left(x^2 - 3^2\right) - 3(x+3)$

$= (x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right) + 2(x+3)(x-3) - 3(x+3)$

Car : $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Donc : $x^3 + 27 + 2\left(x^2 - 9\right) - 3x - 9 = (x+3)\left[\left(x^2 - 3x + 9\right) + 2(x-3) - 3\right] = (x+3)\left(x^2 - 3x + 9 + 2x - 6 - 3\right)$

Donc : $F=x(x+3)(x-1)$

$G=x^3+125+5(x^2-25)=x^3+5^3+5(x^2-5^2)=(x+5)(x^2-5x+5^2)+5(x-5)(x+5)$

$G=(x+5)(x^2-5x+25+5(x-5))=(x+5)(x^2-5x+25+5x-25)=x^2(x+5)$

$H=x^6+2x^3+1$

$H=(x^3)^2+2\times x^3\times 1+1^2$ est du type : $a^2+2ab+b^2$

Donc : $H=(x^3+1)^2$

$N=a^2+4b^2-x^2+4ab$

$N=(a^2+4ab+4b^2)-x^2$

$N=(a^2+2\times a\times 2b+(2b)^2)-x^2=(a+2b)^2-x^2=(a+2b-x)(a+2b+x)$

$S=3ax+3ay-2bx-2by$

$S=3ax+3ay-2bx-2by=3a(x+y)-2b(x+y)=(x+y)(3a-2b)$

**Exercice11 :** Soient $a\in\mathbb{R}^*$ ; on pose $A=\dfrac{2a}{a^2+1}$ : et $B=\dfrac{2a-1}{a^2}$

1)Comparer : $A$ et $B$

2) En déduire la comparaison de : $\dfrac{2,2}{2,21}$ et $\dfrac{1,2}{1,21}$

**Corrigé :**1) On a : $A-B=\dfrac{2a}{a^2+1}-\dfrac{2a-1}{a^2}$

Donc : $A-B=\dfrac{2a\times a^2-(a^2+1)(2a-1)}{a^2(a^2+1)}=\dfrac{2a^3-2a^3+a^2-2a+1}{a^2(a^2+1)}=\dfrac{a^2-2a+1}{a^2(a^2+1)}$

Donc : $A-B=\dfrac{(a-1)^2}{a^2(a^2+1)}\geq 0$

Car On a aussi : $(a-1)^2\geq 0$ et $a^2+1\geq 0$ et $a^2>0$ (le carré est toujours positif)

Donc : $A\geq B$ et si $a\neq 1$ on a $A>B$

2)On a $A\geq B$ c'est-à-dire : $\dfrac{2a}{a^2+1}\geq\dfrac{2a-1}{a^2}$ si $a\in\mathbb{R}^*$

On prend : $a=1{,}1\in\mathbb{R}^*$

Donc : $\dfrac{2\times 1{,}1}{(1{,}1)^2+1}>\dfrac{2\times 1{,}1-1}{(1{,}1)^2}$ Donc : $\dfrac{2,2}{2,21}>\dfrac{1,2}{1,21}$

**Exercice12 :** Soient : $x$ et $y$ des réels tels que : $-4<x<-1$ et $2<y<5$

1) Donner un encadrement pour chacun des nombres suivants :

a) $2x+3y+7$ b) $2x-3y-2$ c) $(2x-3)(3y+10)$ d) $(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}$

2) En déduire un encadrement des nombres : $A=\dfrac{2x-3y-2}{2x+3y+7}$ et $B=\dfrac{3y+10}{2x-3y-2}$

**Corrigé :** Soient : $x$ et $y$ des réels tels que : $-4<x<-1$ et $2<y<5$

1)a) Encadrement de : $2x+3y+7$

On a : $-4<x<-1$ et $2<y<5$ donc : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8+6<2x+3y<-2+15$

Donc : $-2<2x+3y<13$

Donc : $-2+7<2x+3y+7<13+7$ Donc : $\boxed{5<2x+3y+7<20}$

b) Encadrement de : $2x-3y-2=2x+(-3y)-2$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8<2x<-2$ et $-15<-3y<-6$

Donc : $-8+(-15)<2x+(-3y)<-2+(-6)$

Donc : $-23<2x+(-3y)<-8$

Donc : $-23-2<2x-3y-2<-8-2$

Donc : $\boxed{-25<2x-3y-2<-10}$

c) Encadrement de : $(2x-3)(3y+10)$

On a : $-8<2x<-2$ et $6<3y<15$

Donc : $-8-3<2x-3<-2-3$ et $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $-11<2x-3<-5$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5<-(2x-3)<11$ et $16<3y+10<25$

Donc : $5\times16<-(2x-3)(3y+10)<11\times25$

Donc : $80<-(2x-3)(3y+10)<275$

Donc : $\boxed{-275<(2x-3)(3y+10)<-80}$

d) Encadrement de : $(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}=(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)$

On a : $-11<2x-3<-5$ donc : $5<-(2x-3)<11$

Donc : $25<\left(-(2x-3)\right)^2<121$

Donc : $25<(2x-3)^2<121$ 1

On a aussi : $6<3y<15$ donc : $6+10<3y+10<15+10$

Donc : $16<3y+10<25$

Donc : $\sqrt{16}<\sqrt{3y+10}<\sqrt{25}$

Donc : $-5<-\sqrt{3y+10}<-4$ 2

Donc : 1 et 2 donnent : $25+(-5)<(2x-3)^2+\left(-\sqrt{3y+10}\right)<121+(-4)$

Donc : $\boxed{20<(2x-3)^2-\sqrt{3y+10}<117}$

2) a) Déduisons un encadrement du nombre : $A=\dfrac{2x-3y-2}{2x+3y+7}=(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}$

On a : $-25<2x-3y-2<-10$ et $5<2x+3y+7<20$

Donc : $10<-(2x-3y-2)<25$ et $\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{1}{5}$

Donc : $\dfrac{10}{20}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<\dfrac{25}{5}$

Donc : $\dfrac{1}{2}<-(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<5$

Donc : $-5<(2x-3y-2)\times\dfrac{1}{2x+3y+7}<-\dfrac{1}{2}$ Par suite : $\boxed{-5<A<-\dfrac{1}{2}}$

2)b) Déduisons un encadrement du nombre : $B=\dfrac{3y+10}{2x-3y-2}=(3y+10)\times\dfrac{1}{2x-3y-2}$

On a : $16<3y+10<25$ et $-25<2x-3y-2<-10$

On a : $16<3y+10<25$ et $10<-(2x-3y-2)<25$

Donc : $16<3y+10<25$ et $\dfrac{1}{25}<-\dfrac{1}{(2x-3y-2)}<\dfrac{1}{10}$

Donc : $\frac{16}{25} < -(3y+10)\times\frac{1}{2x-3y-2} < \frac{25}{10}$

Donc : $-\frac{25}{10} < (3y+10)\times\frac{1}{2x-3y-2} < -\frac{16}{25}$

Par suite : $\boxed{-\frac{5}{2} < B < -\frac{16}{25}}$

**Exercice13 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$

3) $|x+2|=-1$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$ 5) $|x-1|+|2-x|-3=0$

**Corrigé :** Méthode 1 (Équations ou inéquations de référence) :

Pour résoudre une équation (ou inéquation) avec des valeurs absolues, on peut essayer de se ramener à l'une des situations suivantes ($a \in \mathbb{R}^{+}$) :

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$,
2. $|x| \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a\,;\,a]$,
3. $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \in ]-\infty\,;\,-a] \cup [a\,;\,+\infty[$.

**1)** $|x-1|=5$ Signifie que : $x-1=5$ ou $x-1=-5$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-4$ Donc : $S=\{-4;6\}$

**2)** $|2x+1|=|x-3|$ signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ Car $|x+2|\geq 0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

$3-x=0$ Signifie que : $x=3$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\lvert x-1\rvert$ | $-x+1$ | 0 | $x-1$ | | $x-1$ | |
| $3-x$ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $\lvert 3-x\rvert$ | $3-x$ | | $3-x$ | 0 | $x-3$ | |
| $\lvert x-1\rvert+\lvert 3-x\rvert-3$ | $1-2x$ | | $-1$ | | $2x-7$ | |

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$ devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq 1$ ; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1)-(3-x)-3=0$ Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

5) $|-3x+4|+|-5+x|=10$

On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$-3x+4=0$ Signifie que : $x=\frac{4}{3}$

$-5+x=0$ Signifie que : $x=5$

On remplit un tableau de forme :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{4}{3}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|-3x+4\|$ | $-3x+4$ | $0$ | $3x-4$ | $11$ | $3x-4$ | |
| $\|-5+x\|$ | $5-x$ | $\frac{11}{3}$ | $5-x$ | $0$ | $-5+x$ | |
| $(E_1)$ | $-4x+9=10$ <br> $x=-\frac{1}{4}$ <br> possible | | $2x+1=10$ <br> $x=\frac{9}{2}$ <br> possible | | $4x-9=10$ <br> $x=\frac{19}{4}$ <br> impossible | |

On obtient alors deux solutions : $S=\left\{-\frac{9}{4};\frac{9}{2}\right\}$

**Exercice14 :** 1) Simplifier : $A=\sqrt{\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

2) Soient $x$ et $y$ deux réels tels que : $4<x<y$

Simplifier : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

3) Soient $x$ et $y$ deux réels tels que : $x\in]-1;2[$ et $y\in]-5;-3[$

Simplifier : $C=2|3x+3|-|2y|+5|y+3|-3|y-2x|$

**Corrigé :** 1) Simplifions : $A=\sqrt{\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

$$A=\sqrt{\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2}=\left|\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right|-\left|\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\left|2-\sqrt{5}\right|}-\frac{1}{\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

$A=\frac{1}{-\left(2-\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ Car : $2-\sqrt{5}<0$ $(2^2=4\ ;\ \sqrt{5}^2=5)$ et $2+\sqrt{5}>0$

$$A=\frac{-1}{2-\sqrt{5}}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\frac{-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=\frac{-4}{2^2-\sqrt{5}^2}=\frac{-4}{4-5}=\boxed{4}$$

1) Simplifions : $B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

Soient $x$ et $y$ deux réels tels que : $4<x<y$

$B=\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2}-|y-3|$

$B=|x-y|+|4-x|-|y-3|$

On a : $4<x<y$ alors $x<y$ et donc : $x-y<0$

On a : $4<x<y$ alors $4<x$ et donc : $4-x<0$

On a : $4 < x < y$ et $3 < 4$ et donc : $3 < 4 < x < y$ et donc : $3 < y$ et alors : $y - 3 > 0$

Donc : $B = -(x-y) - (4-x) - (y-3)$

Donc : $B = -x + y - 4 + x - y + 3$

Donc : $\boxed{B = -1}$

3) Simplifions : $C = 2|3x+3| - |2y| + 5|y+3| - 3|y-2x|$

Soient $x$ et $y$ deux réels tels que : $x \in ]-1;2[$ et $y \in ]-5;-3[$

On a : $x \in ]-1;2[$ donc : $-1 < x < 2$ et donc : $-3 < 3x < 6$ et par suite : $0 < 3x+3 < 9$

Donc : $0 < 3x+3$ et alors : $|3x+3| = 3x+3$ : (1)

On a : $y \in ]-5;-3[$ donc : $-5 < y < -3$ et donc : $-10 < 2y < -6$ par suite : $2y < 0$

Et alors : $|2y| = -2y$ : (2)

On a : $-5 < y < -3$ donc : $-2 < y+3 < 0$ par suite : $y+3 < 0$ et alors : $|y+3| = -(y+3)$ : (3)

On a : $-1 < x < 2$ donc : $-4 < -2x < 2$ et $-5 < y < -3$ et on a : $y - 2x = y + (-2x)$

Donc : $-4 + (-5) < y - 2x < -3 + 2$

Donc : $-9 < y - 2x < -1$ par suite : $|y-2x| = -(y-2x) = -y + 2x$ : (4)

D'après (1); (2) ; (3) et (4) on obtient : $C = 2|3x+3| - |2y| + 5|y+3| - 3|y-2x|$

$C = 2(3x+3) + 2y - 5(y+3) + 3(y-2x)$

Donc : $C = 6x + 6 + 2y - 5y - 15 + 3y - 6x$

Donc : $C = -9$

**Exercice15 :** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $x > 1$

On pose : $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

1) Montrer que : $A - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)}$

2) a) Vérifier que : $2\sqrt{x-1} \le \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \le 2\sqrt{x}$

b) En déduire que : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \le A - 1 \le \dfrac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrer que : $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) En déduire que : $1 + \dfrac{1}{2x} \le A \le \dfrac{1}{2(x-1)} + 1$

4) Déduire que $\dfrac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\dfrac{1}{20}$

**Corrigé :** 1) Montrons que : $A - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $x > 1$

$$A - 1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)}$$ (Le conjugué)

$$A-1=\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{x-x+1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$

2) a) Vérifions que : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Soit $x>1$ : $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=2\sqrt{x-1}-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

On a : $-1\le 0$ alors : $x-1\le x$ par suite : $\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}$ donc : $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

D'où : $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 0$ c'est-à-dire : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ ①

D'autre part, on a : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ et comme $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\le 0$

Alors : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\le 0$

Donc : $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$ ②

D'après ①et ②on obtient : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

b) Déduisons que : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\frac{1}{2(x-1)}$

Soit $x>1$ :On a : $2\sqrt{x-1}\le\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\le 2\sqrt{x}$

Alors : $2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{x}$

Alors : $2(x-1)\le\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\le 2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}$

Donc : $\frac{1}{2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\le\frac{1}{2(x-1)}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1\le\frac{1}{2(x-1)}$

3) a) Montrons que : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

Soit $x>1$ ; $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x(x-1)}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x(x-1)-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}=\frac{x^2-x-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}$$

Comme : $-x<-1$ et $-1<0$ alors : $-x<0$et on sait que : $x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)>0$

Donc : $\frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}\le 0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

b) Déduisons que : $1+\frac{1}{2x}\le A\le\frac{1}{2(x-1)}+1$

Soit $x>1$ ; On a : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ alors : $\frac{1}{2x}\le\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ et comme : $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\le A-1$

Alors : $\frac{1}{2x} \leq A-1$ par suite : $\frac{1}{2x} \leq A-1 \leq \frac{1}{2(x-1)}$

Donc : $1+\frac{1}{2x} \leq A \leq \frac{1}{2(x-1)}+1$

Par suite : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}$

Donc : $\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}-\frac{9}{4} \leq \sqrt{x}-\frac{9}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}-\frac{9}{4}$

On prend : $x=5$ on obtient : $-\frac{1}{20} \leq \sqrt{5}-\frac{9}{4} \leq 0$ et comme : $0 \leq \frac{1}{20}$

Alors : $-\frac{1}{20} \leq \sqrt{5}-\frac{9}{4} \leq \frac{1}{20}$ donc : $\left|\sqrt{5}-\frac{9}{4}\right| \leq \frac{1}{20}$

D'où : $\frac{9}{4}$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec la précision $\frac{1}{20}$

**Exercice16 :** 1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ on a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

b) En déduire que : si $|x| \leq 1$ alors $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right| \leq x^2$

2) Donner une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0,999}$ à $10^{-6}$ près

**Corrigé :** 1) a) Soit : $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ ; $2+x+\frac{x^2}{2-x}=\frac{(2+x)(2-x)+x^2}{2-x}=\frac{2^2-x^2+x^2}{2-x}=\frac{4}{2-x}$

b) Soit : $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ tel que : $|x| \leq 1$

On a : $\frac{4}{2-x}=2+x+\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\frac{4}{2-x}-(2+x)=\frac{x^2}{2-x}$

Donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\left|\frac{x^2}{2-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right|=\frac{x^2}{|2-x|}$ $(1)$ Car : $x^2 \geq 0$

On a : $|x| \leq 1$ Donc : $-1 \leq x \leq 1$ c'est-à-dire : $-1 \leq -x \leq 1$

Donc : $2-1 \leq 2-x \leq 1+2$ c'est-à-dire $1 \leq 2-x \leq 3$ et par suite : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$ donc : $-1 \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1$

Par suite : $\frac{1}{|2-x|} \leq 1$ et puisque : $x^2 \geq 0$ alors : $\frac{x^2}{|2-x|} \leq x^2$ et d'après l'égalité $(1)$

On a donc : $\left|\frac{4}{2-x}-(2+x)\right| \leq x^2$

2) Déterminons une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à $2\times10^{-4}$ près ???

D'après 1) b) on donne à $x$ la valeur : $x=10^{-3}$ et puisque $|10^{-2}| \leq 1$

Alors : $\left|\frac{4}{2-10^{-3}}-\left(2+10^{-3}\right)\right|\leq\left(10^{-3}\right)^2$

C'est-à-dire on a : $\left|\frac{4}{1-0,001}-\left(2+0,001\right)\right|\leq 10^{-6}$

Donc : $\left|\frac{4}{0,999}-2,001\right|\leq 10^{-6}$ et par suite : $2,001$ est une valeur approchée du nombre : $\frac{4}{0,999}$ à $10^{-6}$ près

**Exercice17 :** Dans le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points suivants : $A(-2;1)$ ; $B(3;-2)$ ; $C(4;-1)$ et $E(-3;0)$

1) Soit $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

c) Montrer que : $B\in(\Delta)$

d) Déterminer les coordonnées du point $F$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe des ordonnées.

e) Déterminer les coordonnées du point $G$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe des abscisses.

2) Soit $(D)$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases}x=6t-3\\y=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D)$

b) Montrer que les droites $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes, puis déterminer leurs points d'intersection.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D')$ parallèles a $(D)$ passant par $C(4;-1)$

**Solution :1)** a) Soit $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

a) On cherche une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$

Méthode1 : Soit M un point de coordonnées : $M(x;y)\in(\Delta)$

$M(x;y)\in(\Delta)$ Équivaut à : les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x+2;y-1)$ et $\vec{u}(5;-3)$ sont colinéaires

Équivaut à : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

Équivaut à : $\begin{vmatrix}x+2 & 5\\ y-1 & -3\end{vmatrix}=0$ Équivaut à : $-3(x+2)-5(y-1)=0$

Équivaut à : $-3x-6-5y+5=0$ Équivaut à : $-3x-5y-1=0$

Équivaut à : $-(3x+5y+1)=0$

Équivaut à : $3x+5y+1=0$

D'où : une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ est : $(\Delta):3x+5y+1=0$

Méthode2 : Une équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ s'écrit sous la forme : $(\Delta)$ $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de $(\Delta)$ est $\vec{u}(-b;a)$ or on a : $\vec{u}(5;-3)$

Donc : $a=-3$ et $b=-5$ alors l'équation devient : (D) $-3x-5y+c=0$

Or on sait que $A(-2;1)$ et $A\in(\Delta)$

Donc : $-3\times(-2)-5\times1+c=0$ c'est-à-dire : $6-5+c=0$ donc : $c=-1$

Par suite : $(\Delta):-3x-5y-1=0$ ou $(\Delta):3x+5y+1=0$

b) On cherche une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

On a : $(\Delta)$ la droite passe par $A(-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

Donc : une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ est : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

c) Montrons que : $B\in(\Delta)$

<u>Méthode1 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$ et $B(3;-2)$ alors : $3x_B+5y_B+1=3\times3+5\times(-2)+1$

$=9-10+1$

$=0$ Par suite : $B\in(\Delta)$

<u>Méthode2 :</u> On a : : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ et $B(3;-2)$ alors : $\begin{cases} 3=5t-2 \\ -2=-3t+1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 5=5t \\ -3=-3t \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases}$ (On trouve la même valeur pour $t\in\mathbb{R}$ )

Par suite : $B\in(\Delta)$

Remarque : si on trouve des valeurs différentes pour $t$ alors le point n'appartient pas a la droite

d) On cherche les coordonnées du point $F$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$.

<u>Méthode1 :</u> On a : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} 5t-2=0 \\ y=-3t+1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ y=-3t+1 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ y=-3\times\frac{2}{5}+1=-\frac{1}{5} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$ par suite : $F\left(0;-\frac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$F(x;y)\in(\Delta)\cap(OY)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 3\times0+5y+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ 5y=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$

Par suite : $F\left(0;-\frac{1}{5}\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OY)$

e) On cherche les coordonnées du point $G$ d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$.

<u>Méthode1 :</u> On a : $(\Delta)\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+1 \end{cases}$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ -3t+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x=5t-2 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x=5\times\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{1}{3} \\ y=0 \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta):3x+5y+1=0$

$G(x;y)\in(\Delta)\cap(OX)$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x+5\times0+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ 3x=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} y=0 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Par suite : $G\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$ est le point d'intersection de la droite $(\Delta)$ et l'axe $(OX)$

2) Soit $(D)$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $(D)\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite $(D)$

<u>Méthode1 : Soit</u> $t\in\mathbb{R}$ ; on a : $(D)\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x+3=6t \\ y=2t \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} \dfrac{x+3}{6}=t \\ \dfrac{y}{2}=t \end{cases}$

Donc on obtient : $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y}{2}$ (On Ecrit cette Equation sous la forme ax + by + c = 0):

Équivaut à : $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{3y}{6}$ Équivaut à : $x+3=3y$ Équivaut à : $x-3y+3=0$

Équivaut à : $(D)$ : $x-3y+3=0$

<u>Méthode2 :</u> on a : $(D)\begin{cases} x=6t-3 \\ y=2t \end{cases}$

Donc : la droite $(D)$ passe par $E(-3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(6;2)$

Une équation cartésienne de la droite $(D)$ s'écrit sous la forme : $(\Delta)$ $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur de $(D)$ est $\vec{v}(-b;a)$ or on a : $\vec{v}(6;2)$

Donc : $a=2$ et $b=-6$ alors l'équation devient : (D) $2x-6y+c=0$

Or on sait que $E(-3;0)$ et $E\in(D)$

Donc : $2\times(-3)-6\times0+c=0$ c'est-à-dire : $-6+0+c=0$ donc : $c=6$ Par suite : $(D)$ $2x-6y+6=0$

C'est-à-dire après simplification : $(D)$ : $x-3y+3=0$

2)b) Montrons que les droites $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes, puis déterminons leurs points d'intersection.

<u>Méthode1 :</u> On a : $(\Delta)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3)$

On a : $(D)$ $\begin{cases} x = 6t-3 \\ y = 2t \end{cases}$ : Un vecteur directeur de $(D)$ est $\vec{v}(6;2)$

Ou On a : $(D)$ : $x-3y+3=0$ : Un vecteur directeur de $(D)$ est $\vec{v'}(3;1)$

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 2-(-3)\times 6 = 10+18 = 28 \neq 0$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors les droites $(D)$ et $(\Delta)$ sont sécantes

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} (D): x-3y+3=0 \\ (\Delta): 3x+5y+1=0 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x-3y=-3 \quad (\times -3) \\ 3x+5y=-1 \quad (\times 1) \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} -3x+9y=9 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$

On fait la somme des Equations (1) et (2) on obtient : $14y=8$ Équivaut à : $y=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

D'où : $x-3y=-3$ Équivaut à : $x=3y-3$ Équivaut à : $x=3\times\frac{4}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7}$

Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

<u>Méthode2 :</u> On a : $(\Delta): 3x+5y+1=0$ et on a : $(D)$ $\begin{cases} x = 6t-3 \\ y = 2t \end{cases}$

Notons : $M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$

$M(x;y)\in(\Delta)\cap(D)$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 6t-3 \\ y = 2t \\ (\Delta): 3x+5y+1=0 \end{cases}$ D'où : $3(6t-3)+5(2t)+1=0$

Équivaut à : $18t-9+10t+1=0$ Équivaut à : $28t-8=0$ Équivaut à : $28t=8$

Équivaut à : $t=\frac{8}{28}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

Donc : $\begin{cases} x = 6\times\frac{2}{7}-3=\frac{12}{7}-3=-\frac{9}{7} \\ y = 2\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7} \end{cases}$ Donc : $(\Delta)\cap(D)=\left\{M\left(-\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right)\right\}$

3) Déterminons une représentation paramétrique de la droite $(D')$ parallèles a $(D)$ passant par $C(4;-1)$

On a : $(D')$ passe par le point $C(4;-1)$ et parallèle a $(D)$ et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de $(D)$

Donc : $\vec{v}(6;2)$ est aussi un vecteur directeur de $(D')$

Donc : $(D')$ passe par le point $C(4;-1)$ et $\vec{v}(6;2)$ un vecteur directeur de $(D')$

Donc : une représentation paramétrique de la droite $(D')$ est : $(D')\begin{cases} x = 6t+4 \\ y = 2t-1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

**Exercice18 :** (****) Soient ABCD un parallélogramme et $M$ le point de la droite $(AD)$ et $N$ le point tel que : $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$

Et on considère le Repère : $(A;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$ et soit $m$ l'abscisse du point $M$ Dans le ce Repère.

1)Déterminer les coordonnées du point $N$ .

2)Donner une équation cartésienne de la droite (MN).

3)Montrer que quel que soit la position du point $M$ sur la droite $(AD)$ alors la droite $(MN)$ passe par un point fixe $F$ qui ne dépend pas du point et dont on déterminera les coordonnées.

**Solution :** ABCD un parallélogramme et $M \in (AD)$ et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$

1) On considère le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$: $\vec{i} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AB}$

$m$ L'abscisse du point $M$ dans le Repère $(A;\vec{i};\vec{j})$: Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\vec{i}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}$ ( $M \in (AD)$ donc : $y_M = 0$ ) Donc : $N(m;0)$

Détermination des coordonnées du point $N$ ?

On a : $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{AM}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AN} = -3m\vec{i} + \vec{j}$ par suite : $N(-3m;1)$

2) Détermination d'une équation cartésienne de la droite (MN)

On a : $N(-3m;1)$ et $N(m;0)$

Soit $L(x;y) \in (MN)$ Equivaut à : $\det(\overrightarrow{ML};\overrightarrow{MN}) = 0$

Equivaut à : $\begin{vmatrix} x-m & -4m \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$ Equivaut à : $x - m + 4my = 0$ par suite : $(MN): x + 4my - m = 0$

3) $F \in (MN)$ Quel que soit $m$ on a : $x_F + 4my_F - m = 0$

Equivaut à : $x_F + m(4y_F - 1) = 0$

Equivaut à : $x_F = 0$ et $4y_F - 1 = 0$ Equivaut à : $x_F = 0$ et $y_F = \frac{1}{4}$ par suite : $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*