Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes : Arithmétique et les vecteurs du plan

Exercice1 : Déterminer les chiffre x et y pour que le nombre : $N = 12x34y6$
Soit divisible par 4 et par 9

Corrigé : On a $x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ et $y \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Le nombre : $N = 12x34y6$ est divisible par 4 signifie que : le nombre $y6$ est un multiple de4

Donc : $y \in \{1;3;5;7;9\}$.

Le nombre : $N = 12x34y6$ est divisible par 9

Signifie : $1+2+x+3+4+y+6 = 16+x+y$ est un multiple de 9

Si $y=1$ alors $x=1$ et $16+x+y=18$
Si $y=3$ alors $x=8$ et $16+x+y=27$
Si $y=5$ alors $x=6$ et $16+x+y=27$
Si $y=7$ alors $x=4$ et $16+x+y=27$
Si $y=9$ alors $x=2$ et $16+x+y=27$

D'où les couples $(x;y)$ solutions sont :

$(1;1);(3;8);(5;6);(7;4);(9;2)$

Exercice2 : Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Montrer que si n divise a et n divise b alors n divise $2a+3b$

Corrigé : n divise a signifie que : $a = n \times k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Et n divise b signifie que : $b = n \times k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$

Donc : $2a+3b = 2\times n \times k + 3 \times n \times k'$

C'est-à-dire : $2a+3b = n(2k+3k') = n \times k''$ avec $k'' = 2k+3k' \in \mathbb{N}$

Par conséquent : n divise $2a+3b$

Exercice3 : Soit $n \in \mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

1) Vérifier que : $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$

2) En déduire la parité du nombre : n^2+3n+3

Corrigé :1)
$(n+1)(n+2)+1 = n^2+2n+n+2+1 = n^2+3n+3$

2) On a : $n^2+3n+3 = (n+1)(n+2)+1$

Et $(n+1)(n+2)$ est le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs

Donc : $(n+1)(n+2)$ est un nombre pair c'est-à-dire : $(n+1)(n+2) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2+3n+3 = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Par suite : n^2+3n+3 est un nombre impair

Exercice4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) $(25^3+24^3)^7$ 2) $4n+100$ 3) $12n+3$ 4) $n^2+13n+5$ 5) $n^2+9n+50$ 6) n^2+10n 7) $16n^2+8n+1$ 8) $5n^2+7n+4$

Corrigé :1) 24^3 est paire car le produit de nombres pairs

25^3 Est impair car le produit de nombres impairs

Donc : 25^3+24^3 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $(25^3+24^3)^7$ est impair car le produit de nombres impairs

2) $4n+100 = 2(2n+50) = 2\times k$ avec $k = 2n+50 \in \mathbb{N}$

Donc $4n+100$ est un nombre pair

3) $12n+3 = 2(6n+1)+1 = 2\times k+1$ avec $k = 6n+1 \in \mathbb{N}$

Donc $12n+3$ est un nombre impair

4)
$n^2+13n+5 = n^2+n+12n+4+1 = n(n+1)+2(6n+2)+1$

$n(n+1)$ Est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc :
$n^2+13n+5 = 2k+2(6n+2)+1 = 2(k+6n+2)+1 = 2k'+1$
avec $k' = k+6n+2$

Par suite : $n^2+13n+5$ est un nombre impair

5)
$n^2+9n+50 = n^2+n+8n+50 = n(n+1)+2(4n+25)$

$n(n+1)$ Est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2+9n+50 = 2k+2(4n+25) = 2(k+4n+25) = 2k'$

Avec $k' = k+4n+25$

Donc $n^2+9n+50$ est un nombre pair

6) Etude de la parité n^2+10n

1ére cas : 1cas : si n pair

$n^2 = n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $10n = 2\times 5n = 2\times k$ est pair

On a : n^2+10n c'est la somme de deux Nombres pairs

Donc : n^2+10n est pair

2ére cas : 1cas : si n impair

$n^2 = n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $10n = 2\times 5n = 2\times k$ est pair

On a : n^2+10n c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair Donc : n^2+10n est impair

7) $16n^2+8n+1 \quad n\in\mathbb{N}$

$16n^2+8n+1=(4n)^2+2\times 4n\times 1+1^2=(4n+1)^2$

On a : $4n+1=2\times(2n)+1=2\times k+1$ est un nombre impair

Donc $(4n+1)^2$ est un nombre impair car $4n+1$ est un nombre impair et le carré d'un nombre impair est impair

8) $5n^2+7n+4$

$5n^2+7n+4=5n^2+5n+2n+4=5n(n+1)+2(n+2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$5n^2+7n+4=5\times 2k+2k'=2(5k+k')=2k''$ Avec :

$k'=n+2\in\mathbb{N}$ et $k''=5k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $5n^2+7n+4$ est un nombre pair

Exercice5 : 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé : 1) soit $n\in\mathbb{N}$ donc : $n+(n+1)+(n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3k$ avec : $k=n+1\in\mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a donc :

$(2k+1)+[(2k+1)+2]=4k+4=4(k+1)=4k'$

Avec : $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice6 : Soient : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ et on pose :

$N=(n+4m)^2-n^2$

Montrer que : N est un entier naturel divisible par 8

Corrigé : 1)

$N=(n+4m)^2-n^2=(n+4m+n)(n+4m-n)=8m(n+m)$

Puisque : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ alors : $8m(n+m)\in\mathbb{N}$ et par suite : $N\in\mathbb{N}$

Et on a : $N=8m(n+m)=8k$ avec : $k=m(n+m)$

Par suite : N est un entier naturel divisible par 8

Exercice7 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse :

0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191;191 ;259

Corrigé : 1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0

17 est premier car admet exactement deux diviseurs

21 n'est pas premier car 3 divise 21 $(21=7\times 3)$

41 est premier car admet exactement deux diviseurs

87 n'est pas premier car 3 divise 87 $(87=29\times 3)$

105 n'est pas premier car 5 divise 105 $(105=5\times 21)$

Question : Est-ce que 239 est premier ?

On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »

Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\le 239$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239

Donc 239 est premier

2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787

3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient :

$p^2\le 191$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191.

Donc 191 est premier

1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 un multiple de 3 donc 3 divise 1004001

259 n'est pas premier car $259=7\times 37\in\mathbb{N}$ c'est à dire 7 divise 259

Exercice8 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\succ 2$

Montrer que si n est premiers alors $n+1$ n'est pas premiers

Corrigé : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\succ 2$

On a n est premiers alors n est impair donc $n+1$ est pair

Par suite : $n+1$ n'est pas premiers

Exercice9 : Soit n un entier naturel :

Montrer que si le nombre : $n+1$ est un carré parfait alors le nombre : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits

Corrigé : 1) soit n un entier naturel tel que : $n+1$ est un carré parfait

Donc : $n+1=a^2$ avec $a\in\mathbb{N}$

On a : $14n+50=14n+14+36=14(n+1)+36$

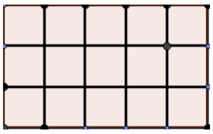
Donc : $14n+50=14a^2+36=9a^2+4a^2+a^2+36$

Donc : $14n+50=(3a)^2+(2a)^2+a^2+6^2$

Par suite : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits

Exercice10 : Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1. Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.



2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.

c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

Corrigé : 1) Puisque $454=33\times13+25$ et $375=33\times11+12$, il faut un peu plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de11 carreaux en largeur.

Donc : un nombre de carreaux non coupés égal à $11\times13=143$

2)a) Les diviseurs de 455 sont 1 , 5 , 7, 13 , 35 , 65 , 91 et 455.

Les diviseurs de 385 sont 1 , 5 , 7 , 11 , 55 ,77 et 385

b) L'ensemble des diviseurs communs à 455 et 385 sont donc : 1 , 5 et 7.

c) On peut donc utiliser des dalles de côté 7 cm pour carreler la cuisine.

Il en faudra 65 en longueur et 55 en largeur.

3) a) La liste des multiples de 24 inférieurs à 400 est 24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,312,336,360 et 384.

La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 est : 15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,165,180,195,210,225,240,255,270,285,300,315,330,345,360 et 375 b) La liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400 est donc 120,240 et 360.

c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de 360 cm (soit 3m60) de côté avec des carreaux de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Exercice11 : Décomposer les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers.

2) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{84}{60}$

3) Simplifier des racines carrées suivant : $A=\sqrt{2100}$ et $B=\sqrt{63}\times\sqrt{105}$

Corrigé : 1) Décomposons les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers on trouve :

$84=2^2\times3\times7$ et $60=2^2\times3\times5$

2) En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers on trouve :

$$\frac{84}{60}=\frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times3\times5}=\frac{7}{5}\longleftarrow \quad \text{Fraction irréductible}$$

3) $\sqrt{2100}=\sqrt{2\times2\times3\times5\times5\times7}$

$$=\sqrt{2^2\times3\times5^2\times7}$$

$$=\sqrt{\left(2^2\times5^2\right)\times3\times7}$$

$$=\sqrt{(2\times5)^2}\times\sqrt{3\times7}$$

$$=2\times5\times\sqrt{21}$$

$$=10\sqrt{21}$$

On décompose chacun des nombres 63 et 105 on trouve :

$63=3\times21=3\times3\times7=3^2\times7$ et $105=3\times35=3\times5\times7$

D'où $B=\sqrt{63\times105}=\sqrt{3^2\times7\times3\times5\times7}=3\times7\sqrt{3\times5}=21\sqrt{15}$.

Exercice12 : (***) Soit : $n\in\mathbb{N}$ On pose : $F=\frac{2n+11}{n+1}$

Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $F=\frac{2n+11}{n+1}$

Représente un entier naturel ?

Correction :

2)On constate que $2n+11=2(n+1)+9$

Donc :

$$F=\frac{2n+11}{n+1}=\frac{2(n+1)+9}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}+\frac{9}{n+1}=2+\frac{9}{n+1}$$

Comme : 2 est un entier naturel

Alors :La fraction $F = \frac{2n+11}{n+1}$ Représente un entier naturel si et seulement si : $n+1$ divise 9,
Or Les diviseurs de 9 sont 1 ; 3 ; 9
Donc : F Représente un entier naturel si et seulement si : $n+1 \in \{1;3;9\}$
si et seulement si : $n \in \{0;2;8\}$
Inversement on vérifie que si $n \in \{0;2;8\}$ alors La fraction F Représente un entier naturel
Conclusion : la fraction F représente un entier naturel pour les valeurs de l'entier n : $0;2;8$

Exercice13 : Soient *m* et *n* deux nombres entiers naturels, tel que : $m \geq n$
1) Monter que *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité.
2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $m^2 - n^2 = 28$

Corrigé : 1) on a : $(m+n)+(m-n) = 2m$ c'est-à-dire la somme est paire donc automatiquement *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité. Car si non la somme sera impaire

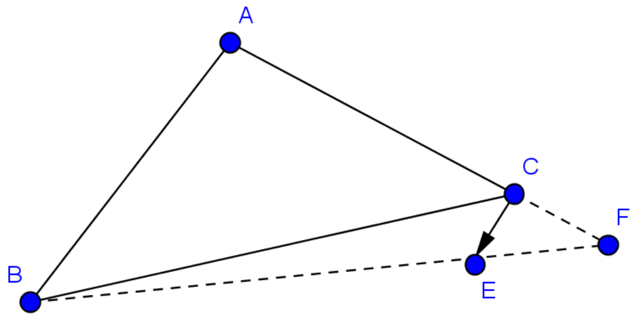
2) $m^2 - n^2 = 28$ Équivaut à : $(m-n)(m+n) = 28$ (1)
Mais les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28
Et puisque : $m-n \leq m+n$ et *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité.
Alors on a : $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=14 \end{cases}$ Donc on a : $\begin{cases} m=8 \\ n=6 \end{cases}$

Exercice14 : (***) D'un aéroport un avion part tous les 9 jours vers un autre pays et du même aéroport un autre avion part tous les 15 jours vers un autre pays
Si les deux avions partent les mêmes jours pour la 1ere fois après combien de jours ils partiront dans les mêmes jours pour la deuxième fois ?

Corrigé : Les départs du premier avion à partir du premier jour sont des multiples de 9 : qui sont 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ;…
Les départs du deuxième avion à partir du premier jour sont des multiples de 15 :
Qui sont ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ;…
Le PPCM (9 ; 15) est le nombre de jours après lesquels les
Deux avions partent dans les mêmes jours pour la deuxième fois et puisque : PPCM (9 ; 15) =45
Donc le nombre de jours est 45
Autre méthode de calcul du PPCM (9 ; 15)
On décompose chacun des nombres 9 et 15.
On trouve : $9 = 3^2$ et $15 = 3 \times 5$
On applique la règle pour calculer le PPCM
Donc : PPCM (9 ; 15) = $3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$

Exercice 15 : Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
1) Faire une figure
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
4) En déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$
$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
On a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?
$\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires
D'où Les points E, F et B sont alignés

Exercice 16 : (**) Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$
1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Corrigé : 1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
D'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$

D'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$

D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices