http://www.xriadiat.com **DL1/J** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers**
- ✓ **Les vecteurs**
- ✓ **La projection**

La correction voir http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : On considère les nombres : $a=14700$ et $b=16500$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b

2) En déduire $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

3) Déterminer le nombre de diviseurs des nombres de a

4) Simplifier : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a\times b}$

5) Montrer que $3\times a$ est un carré parfait.

Corrigé : 1) La décomposons des nombres a et b

$a=2^2\times3^1\times5^2\times7^2$ et $b=2^2\times3^1\times5^3\times11^1$

2) Calculons le : $PGCD(a;b)$ ***et*** $PPCM(a;b)$.

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $PGCD(a;b)=2^2\times3^1\times5^2=300$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

$PPCM(a;b)=2^2\times3^1\times5^3\times7^2\times11=808500$

3) Déterminons le nombre de diviseurs des nombres a

On a : $a=2^2\times3^1\times5^2\times7^2$ donc : le nombre de diviseurs des nombres a est :

$(2+1)\times(1+1)\times(2+1)\times(2+1)=3\times2\times3\times3=54$

4) Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\frac{a}{b}$

Méthode1 : $\frac{a}{b}=\frac{2^2\times3^1\times5^2\times7^2}{2^2\times3^1\times5^3\times11^1}=\frac{7^2}{5\times11}=\frac{49}{55}$

Méthode : $\frac{a}{b}=\frac{14700}{16500}=\frac{14700\div300}{16500\div300}=\frac{49}{55}$

Déterminons la forme simplifiée du nombre : $\sqrt{a\times b}$

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{2^2\times3^1\times5^2\times7^2\times2^2\times3^1\times5^3\times11^1}=\sqrt{2^4\times3^2\times5^4\times7^2\times5^1\times11^1}=2^2\times3\times5^2\times7\sqrt{5^1\times11^1}=2100\sqrt{55}$

5)Montrons que le nombre $3\times a$ est un carré parfait.

$3\times a=3\times2^2\times3^1\times5^2\times7^2=2^2\times3^2\times5^2\times7^2=\left(2^1\times3^1\times5^1\times7^1\right)^2=(210)^2$

Donc : le nombre $3\times a$ est un carré parfait.

Exercice02 : On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.

Corrigé : la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe est un multiple commun de 24 et 15 et la longueur

du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.
$24 = 2^3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$
PPCM (24, 15) $= 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ cm
(On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte le plus grand exposant).
Mais La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.
On doit prendre un multiple de 120 cm entre 300 et 400 cm et Puisque $120 \times 3 = 360\text{cm}$
Donc : La longueur du côté doit être : **360** cm

Exercice03 : Soit n un nombre entier naturel.

1) Soient : $x = n^2 - n + 1$ et $y = 6n^3 + 8$

a) Etudier la parité de x et y et déduire la parité de $x + y$ et $x \times y$

2) Montrer que le nombre $A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1}$ est multiple de 13.

3) Montrer que 239 est un nombre premier.

Corrigé : 1)a) Etudions la parité de x et y

$x = n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$

On a : $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$x = 2k + 1$

Donc : $x = n^2 - n + 1$ est un nombre impair

$y = 6n^3 + 8$

$y = 6n^3 + 8 = 2\left(3n^3 + 4\right) = 2k$ avec $k = 3n^3 + 4 \in \mathbb{N}$

Donc $y = 6n^3 + 8$ est un nombre pair

Etudions la parité de $x + y$

On a : x est un nombre impair et y est un nombre pair

Donc : $x + y$ est un nombre impair car c'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

Etudions la parité de $x \times y$

On a : x est un nombre impair et y est un nombre pair

Donc : $x \times y$ est un nombre pair car c'est le produit d'un nombre pair et un nombre impair

2) Montrons que le nombre $A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1}$ est un multiple de 13.

$A = 4^{2n} + 16^{n+1} - 4^{2n+1} = 4^{2n} + \left(4^2\right)^{n+1} - 4^{2n+1} = 4^{2n} + 4^{2n+2} - 4^{2n+1} = 4^{2n}\left(1 + 4^2 - 4^1\right) = 13 \times 4^{2n}$

3) Montrer que 239 est un nombre premier.

On utilise la règle :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239.

Donc 239 est premier

Exercice04 : 1) Démontrer que : $3n^2 + 15n + 7$ est un nombre impair.

2) Démontrer que : $5n^2 - 7n + 4$ est un nombre pair.

3) Démontrer que : $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple du nombre **4**.

Corrigé : 1) On a : $3n^2 + 15n + 7 = n^2 + n + 2n^2 + 14n + 6 + 1 = n(n+1) + 2 \times \left(n^2 + 7n + 3\right) + 1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $3n^2 + 15n + 7 = 2k + 2 \times \left(n^2 + 7n + 3\right) + 1$

Donc : $B = 2\left(k + n^2 + 7n + 3\right) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = k + n^2 + 7n + 3$

Par suite : $3n^2 + 15n + 7$ est un nombre impair.

2)On a : $5n^2 - 7n + 4 = n^2 + n + 4n^2 - 8n + 4 = n(n+1) + 2 \times \left(2n^2 - 4n + 2\right)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $5n^2-7n+4=2k+2\times(2n^2-4n+2)$

Donc : $B=2(k+2n^2-4n+2)=2k'$ avec $k'=k+2n^2-4n+2$

Par suite : $5n^2-7n+4$ est un nombre impair.

3) Démontrons que : n^4-n^2+16 est un multiple du nombre **4**.

On a : $n^4-n^2+16=n^2(n^2-1)+4\times4=n\times n(n-1)(n+1)+4\times4=(n-1)\times n\times n(n+1)+4\times4$

Et on a : $(n-1)\times n$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $(n-1)\times n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^4-n^2+16=2k'\times2k+4\times4$

Donc : $n^4-n^2+16=4k'k+4\times4=4(k'k+4)$

Donc : $n^4-n^2+16=4k''$ avec $k''=k'k+4$

Donc : n^4-n^2+16 est un multiple du nombre **4**.

Exercice05 : 1) Le nombre **437** est-il premier ? Justifier votre réponse ?

2) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que : $x^2-y^2=437$

3) Montrer que le nombre A est divisible par le nombre **20** avec : $A=9^{n+2}+19\times9^n$; $n\in\mathbb{N}$

4) Soit $n\in\mathbb{N}$:

a) Monter que le nombre $n\times(n+1)$ est pair.

b) Etudier la parité des nombres : $B=n^2+5n+5$ et $C=11n^2+n$

c) Déduire une valeur de : $D=(n+2)\times(-1)^{11n^2+n}+(n-3)\times(-1)^{n^2+5n+5}$

Corrigé : 1) 437 n'est pas premier car 19 divise 437 en effet : $437=19\times23$

2) On a : $437=19\times23$ donc : les diviseurs de 437 sont :1 ;19 ;23;437

$x^2-y^2=437$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=437$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 437 et $x-y<x+y$

Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=437\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=19\\x+y=23\end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $\begin{cases}x=219\\y=18\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=21\\y=2\end{cases}$

Donc : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels tels que $x^2-y^2=437$ sont : $(21;2)$; $(219;18)$

3) $A=9^{n+2}+19\times9^n=9^n(9^2+19)=100\times9^n=20\times5\times9^n$

$A=20\times(5\times9^n)=20\times k$ Avec $k=5\times9^n\in\mathbb{N}$

Donc : A est divisible par le nombre **20**

4) a) On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

En effet :**1ére cas :** si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k$ par suite :

$n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$ avec $k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

2ére cas : si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

b)

• Etude de la parité du nombre : $B=n^2+5n+5$

On a : $B=n^2+5n+5=n^2+n+4n+1=n(n+1)+2\times(2n)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $B=n^2+5n+5=2k+2\times(2n)+1$

Donc : $B=2(k+2n)+1=2k'+1$ avec $k'=k+2n$

Par suite : $B=n^2+5n+5$ est un nombre impair.

• Etude de la parité du nombre : $C=11n^2+n$

On a : $C=11n^2+n=n^2+n+10n^2=n(n+1)+10n^2$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $C^2=2k+2\times(5n)=2(k+5n)=2k'$ avec $k'=k+5n\in\mathbb{N}$

Par suite : $C=11n^2+n$ est un nombre pair.

c) Déduction de la valeur de : $D=(n+2)\times(-1)^{11n^2+n}+(n-3)\times(-1)^{n^2+5n+5}$

Puisque : $C=11n^2+n$ est un nombre pair alors : $(-1)^{11n^2+n}=1$

Puisque : $B=n^2+5n+5$ est un nombre impair alors : $(-1)^{n^2+5n+5}=-1$

Donc : $D=(n+2)\times1+(n-3)\times(-1)=n+2-n+3=5$

Exercice06 : Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que :

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ Et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

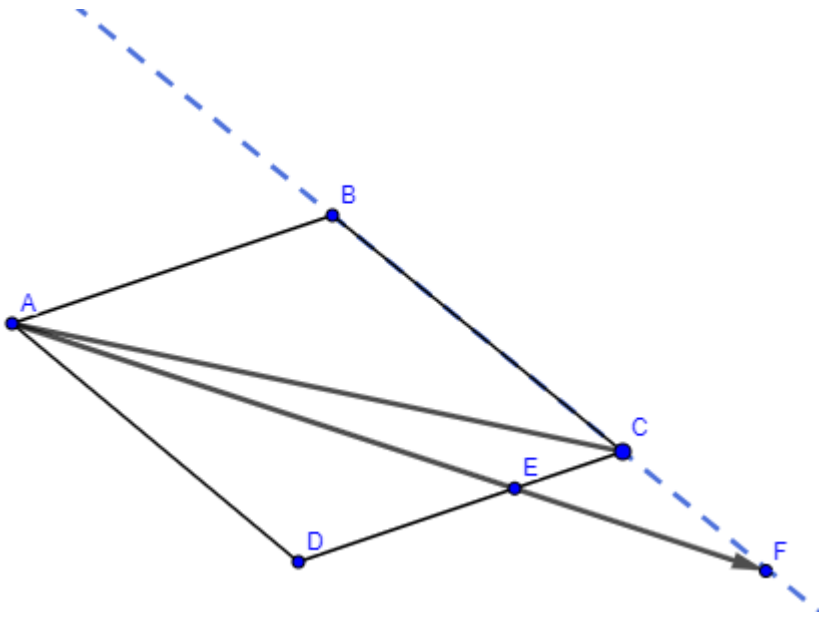
1) Faire une figure

2)a) Montrer que : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

b) Montrer que : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

3) En déduire que : Les points B, C et F sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2)a) Montrons que : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

PROF: ATMANI NAJIB

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ et comme : $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ c'est-à-dire :

$\overrightarrow{FA}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$

2)b) Montrons que : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CD}\right)$ et puisque : ABCD un parallélogramme alors :

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

Donc : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$

3) Déduisons que: Les points B, C et F sont alignés

On a : $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires, ceci signifie que les points B, C et F sont alignés

Exercice07 : ABC est un triangle et I un point du plan tel que : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

1) Représenter le point I

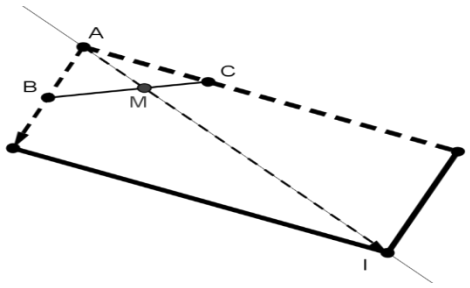
2) Soit M le point d'intersection des droites :(AI) et (BC)

On pose : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{MB}$ avec x et y des réels

a) Montrer que : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$

Corrigé :1) la figure



2) On a : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{AI}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$

Or on sait que : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM}=y\overrightarrow{MB}$ donc :

$x\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}-y\overrightarrow{MB}\right)$

Donc : $x\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AM}-3y\overrightarrow{MB}$

Donc : $x\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AM}+(2-3y)\overrightarrow{MB}$

Donc : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$

1)On a : $(x-5)\overrightarrow{AM}=(2-3y)\overrightarrow{MB}$ et puisque les points : A ; B ; M ne sont pas alignés

Alors on a nécessairement : $x-5=0\ et\ 2-3y=0$

Donc : $x=5\ et\ y=\frac{2}{3}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AM}$ alors : $\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{AM}$ et par suite : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$.

Exercice08 : Soit ABCD un parallélogramme et I et J sont milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) a) Démontrer que : $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JB}$

b) En déduire la nature du quadrilatère DIBJ.

2) a) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ Et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que les points I, M, D sont alignés

d) Montrer de même que les points J, N, B sont alignés

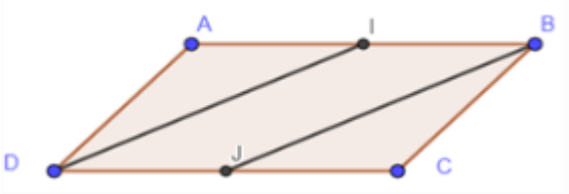
3) Soit ABC, un triangle de centre de gravité G, H le milieu de [BC].

Démontrer que pour tout point M du plan :

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

b) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{HA}$

Corrigé :



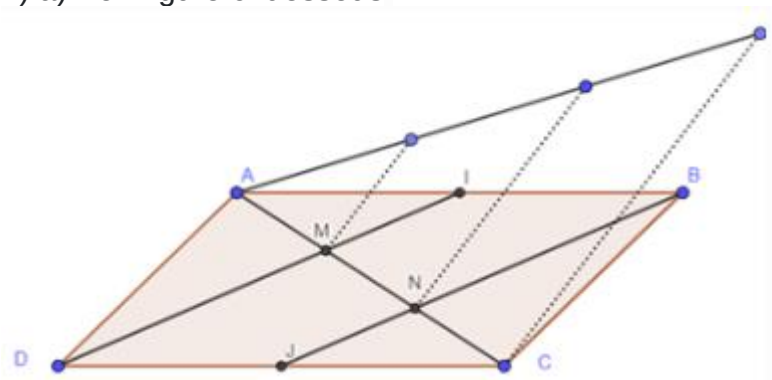
1)On a par définition de I et J : $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Et $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ puisque ABCD est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{DJ}$ et par conséquent le quadrilatère IBJD ou (DIBJ)est aussi un parallélogramme.

Par suite : $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JB}$

2) a) Voir figure ci-dessous.



b) $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Il en résulte que : $\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IM}$ et par conséquent les points I, D et M sont alignés.

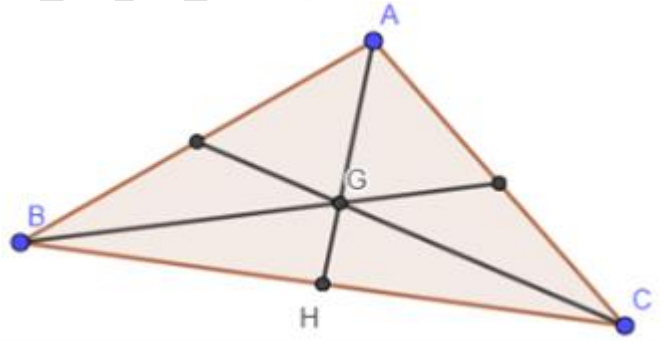
c) $\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

D'où : $\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{JN}$ t l'alignement des points J, B et N

3) a) Introduire G dans : $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MC}$ et tenir compte du fait que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

b) Introduire H dans : $2\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MC}$ et utiliser le fait que : $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$



Exercice09 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de : $[AC]$. E un point de (AC) tel que : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $P_{((AB);(IB))}(E)=F$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Corrigé : On a : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$

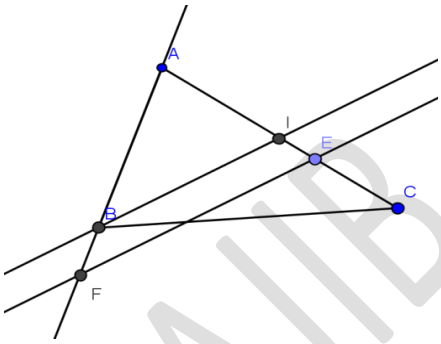
Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ donc **:** $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E)=F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I)=B$

Et $P_{((AB);(IB))}(A)=A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient

D'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB