http://www.xriadiat.com **DL1/G** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers**
- ✓ **Les vecteurs**
- ✓ **La projection**

Exercice01 : 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 170 ; 68
2) Calculer : *PGCD (68 ; 170); PPCM (68 ; 170)*
3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 170 ; 68
b) Donner la forme irréductible de la fraction : $\frac{68}{170}$

Corrigé : : 1)*170 =* $2^1 \times 5 \times 17$
68 = $2 \times 2 \times 17 = 2^2 \times 17$
2) a) Le PGCD :« Le plus grand diviseur commun des deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (72 ; 60) $=2^1\times 17 =34$
b) On applique la règle suivante pour calculer le PPCM :« Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers
Communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PPCM (68 ; 170) $=2^2 \times 5\times 17= 340$
3) a) Les diviseurs communs à 170 ; 68 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.
On a : *PGCD (68 ; 170) =34 donc les diviseurs communs à* 170 ; 68 *sont les diviseurs de 34 qui sont : 1, 2 ,17, 34.*
3) b) Méthode 1 : $\frac{68}{170}=\frac{2^2\times17}{2^1\times5\times17}=\frac{2}{5}$
Méthode 2 : On divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD (68 ; 170) donc :
$\frac{68}{170}=\frac{68\div34}{170\div34}=\frac{2}{5}$

Exercice02 : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$;
1) Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.
2) Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair
3) Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Corrigé : 1) On a : a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a=2k$
b Impair alors il existe $k'\in\mathbb{N}$: $b=2k'+1$
Donc : $a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$
Par suite : $a+b$ est un nombre impair
2) a est impair donc : $a=2k+1$avec $k\in\mathbb{N}$
$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times2k\times1+1^2=4k^2+4k+1$
Donc : $a^2=2(2k^2+2k)+1=2k''+1$; $k^2+2k=k''\in\mathbb{N}$
Par suite : a^2 est un nombre impair
3) On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair
Donc : contradiction et par suite : a est un nombre impair (Raisonnement par l'absurde)

Exercice03 : 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair
2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n

Corrigé : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.
1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou $100\times101\ldots$

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier

Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$ avec

$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) a) 2023^2+2022^2 : 2022^2 est paire car le carré d'un nombre pair.
2023^2 est impair car le carré d'un nombre impair.
2023^2+2022^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

b) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2\times k+1$ avec $k=n^2+3\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n^2+7$ est un nombre impair.

c) $2022n+4m+2021=2022n+4m+2020+1=2(1011n+2m+1010)=2k+1$

Avec : $k=1011n+2m+1010\in\mathbb{N}$.
Donc : $2022n+4m+2021$ est un nombre impair.

d)On a : $n^2+2021n+2023=n^2+n+2020n+2022+1=n(n+1)+2(1010n+1011)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+2021n+2023=2k+2(1010n+1011)+1$

Donc : $n^2+2021n+2023=2(k+1010n+1011)+1=2k'+1$ avec $k'=k+1010n+1011$

Par suite : $n^2+2021n+2023$ est un nombre impair.
e) Etude de la parité de $n^2+2024n$:
1ére cas : <u>si n pair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2+2024n$ est pair.
2ére cas : <u>si n impair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2+2024n$ est impair.

Exercice04 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier votre réponse ?
1 ; 1075 ; 1061 ; 801020103 ; 2017 ;2021

Corrigé : 1)1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
2)1075 n'est pas premier car 7 divise 1075
3) Est ce que 1061 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 1061$
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 Car : $31^2 = 961$ et $37^2 = 1396$
Et aucun ne divise 1061 Donc 1061 est premier
4) 667 n'est pas premier car 23 divise 667 ($667 = 23 \times 29$)
5) 801020103 n'est pas premier car la somme des chiffres est un multiple de 3 donc 3 divise 801020103
5) Est ce que 2019 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 2019$.
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ;37 ;41 ;43 Car : $43^2 = 1849$ et $47^2 = 2209$
Et aucun ne divise 2017 Donc 2017 est premier
4) 2021 n'est pas premier car 43 divise 2021

Exercice05 : Soit n un entier naturel :
1) Factoriser le nombre : $n^3 + 1$
2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Corrigé : 1) On a : $n^3 + m^3 = (n+m)(n^2 - n\times m + m^2)$

Donc : $n^3 + 1 = n^3 + 1^3 = (n+1)(n^2 - n + 1)$

2) $27000000001 = 27\times 10^9 + 1 = 3^3 \times 10^9 + 1 = 3^3 \times 10^9 + 1 = \left(3\times 10^3\right)^3 + 1 = \left(3\times 10^3 + 1\right)\left(\left(3\times 10^3\right)^2 - 3\times 10^3 + 1\right)$

Donc : $27000000001 = 3001\left(3000^2 - 3000 + 1\right) = 3001 \times 8997001$

Donc : le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier car il admet plus que de deux diviseurs qui sont : 3001 et 8997001

Exercice06 : Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat. Il souhaite vendre des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :
• tous les paquets aient la même composition ;
• après mise en paquet, il ne reste ni œufs, ni poissons.
1) Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
2) Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?

Corrigé : Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 œufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.
1) Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.
Le nombre de paquets doit être un diviseur commun de 2 622 et 2 530, or on a :
$\frac{2622}{19} = 138 \in \mathbb{N}$ et $\frac{2530}{19} \approx 133,2 \notin \mathbb{N}$
L'entier 19 n'est donc pas un diviseur commun de 2 622 et 2 530.
Ce qui veut dire que l'on ne pas répartir les 2 530 poissons dans 19 paquets, il en reste 3 car :
2 530 = 19 × 133 + 3
2) Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ?
Quelle sera la composition de chaque paquet ?
• Le nombre de paquets qu'il peut réaliser est un diviseur commun à 2 622 et à 2 530. Puisque l'on cherche le plus grand, c'est donc leur PGCD.
• Calculons ce PGCD : $2622 = 2^1 \times 3^1 \times 19^1 \times 23^1$ et $2530 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1 \times 23^1$
$PGCD(2622;2530) = 2^1 \times 23^1 = 46$
• On a par ailleurs
$\frac{2622}{46} = 57$ et $\frac{2530}{46} = 55$
Dans chacun des 46 paquets il y aura 57 œufs et 55 poissons

Exercice07 : 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3
2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé :1) Soit $n\in\mathbb{N}$ donc : $n+(n+1)+(n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3k$ avec : $k=n+1\in\mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ Avec $k\in\mathbb{N}$:

On a donc : $(2k+1)+[(2k+1)+2]=4k+4=4(k+1)=4k'$ Avec : $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice08 : Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}$

1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17
2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b
3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Corrigé : 1) $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^{3}-10^{2n}\times10^{1}=10^{2n}\times\left(10^{3}-10\right)$

$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$

$a=3^{2}\times11\times10^{2n}\times10=3^{2}\times11\times10^{2n+1}=11\times k$ avec $k=3^{2}\times10^{2n+1}$

Donc a est un multiple de 11

On a : $b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}=3\times10^{n}\times10^{1}+4\times10^{n}=10^{n}(30+4)=10^{n}\times34=10^{n}\times2\times17$

$b=17\times2\times10^{n}=17\times k$ avec : $k=2\times10^{n}$

Donc b un multiple de 17

2)Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=3^{2}\times11\times10^{2n+1}$ donc : $a=3^{2}\times11\times(2\times5)^{2n+1}$

Donc : $a=2^{2n+1}\times3^{2}\times5^{2n+1}\times11$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=17\times2\times10^{n}$ donc : $b=17\times2\times10^{n}=17\times2\times(2\times5)^{n}$

Donc : $b=17\times2\times2^{n}\times5^{n}=2^{n+1}\times5^{n}\times17$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

3) Déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^{2n+1}\times3^{2}\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^{n}\times17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^{n}$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\vee b=2^{2n+1}\times3^{2}\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$

Exercice09 : Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x^{2}-y^{2}=17\ (1)$

Corrigé : 1) $x^{2}-y^{2}=17$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=17$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51

On a : 17 est premier donc les diviseurs de 17 sont : 1 et 17

Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=17\end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $2x=18$ c'est à dire $x=9$ et donc : $y=17-9=8$: Par suite : le couple $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) est :$(9;8)$

Exercice10 : Soit ABCD est un parallélogramme et soient M ; N ; E et F des points tels que :
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{NB}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$ et en déduire la nature du quadrilatère DEBF

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ et en déduire la nature du quadrilatère AECF

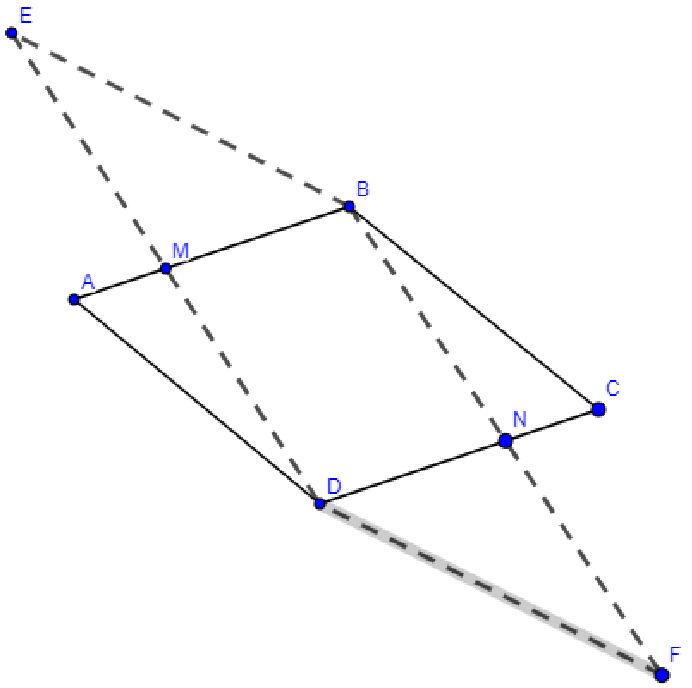
4) Montrer que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}\right)$

Corrigé : 1) La figure : Voir la figure ci-dessous

On a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

Et on a : $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{ME}$ donc : M est le milieu du segment $[DE]$

Et on a : $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{NB}$ donc : N est le milieu du segment $[FB]$



2) a) Montrons que : $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}$ et on a : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$ car M est le milieu du segment $[DE]$

Donc : $\overrightarrow{DE}=2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$ c'est-à-dire : $\boxed{\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}}$

Montrons que : $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$

On a : $\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{NC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et on a : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}$ Donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ car : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ et puisque $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ alors : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DM}$

N est le milieu du segment $[FB]$ donc : $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{NB}$

et puisque $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DN}$ alors : $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$

On a donc $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DE}$ par suite : le quadrilatère DEBF est un parallélogramme

3) Montrons que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ et déduction de la nature du quadrilatère AECF

On a : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}$ et on a : $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NC}$ et on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{NC}$ et

$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FN}$

Donc : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$

On a donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ par suite : le quadrilatère AECF est un parallélogramme

4) Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$

On a : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$ ① car DEBF est un parallélogramme

et on a : $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$

Donc : $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{DM}$ par suite : le quadrilatère DMNF est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{MN}$ ②

De ① et ② en déduit que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$

Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}\right)$

On a : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}\right)+\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}\right)$

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}$ donc : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}$

D'après la question précédente on a : $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{MN}$

Donc : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}$

Donc : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DB}\right)$

Exercice11 : Soit ABCD un parallélogramme et E et F des points tels que :

$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

1) Faire une figure.

2)a) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

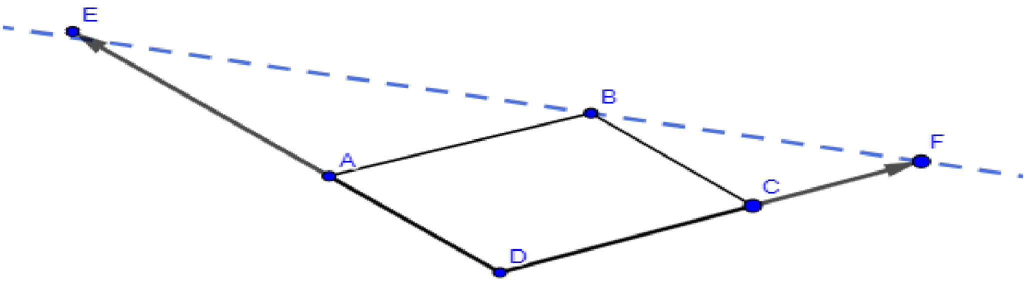
b) Montrer que : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

3) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

4)a) Montrer que : $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FB}$

b) En déduire que les points B ; E et F sont alignés

Corrigé :1)



2)a) Montrons que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AB}+\left(-1+\frac{5}{2}\right)\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\left(-1+\frac{5}{3}\right)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

3) a) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ et comme ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}}$

b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ et comme ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}$

4)a) Montrons que : $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FB}$

$2\overrightarrow{BE}=2\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=-3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}=3\left(-\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

Comme : $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{BF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ alors : $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FB}$

b) Déduisons que les points B ; E et F sont alignés

On a : $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FB}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont colinéaires, ce qui signifie que les points B; E et F sont alignés.

Exercice12 : Soit un triangle ABC et soient les points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$; Que peut-on en déduire géométriquement ?
2) Construire les points D et E
3) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$; Déduire de cette égalité et de la précédente que E, B et D sont alignés.
4) Soit I le milieu de $[AB]$ Justifier que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$;

Qu'en déduire pour les droites (AE) et (CI) ?

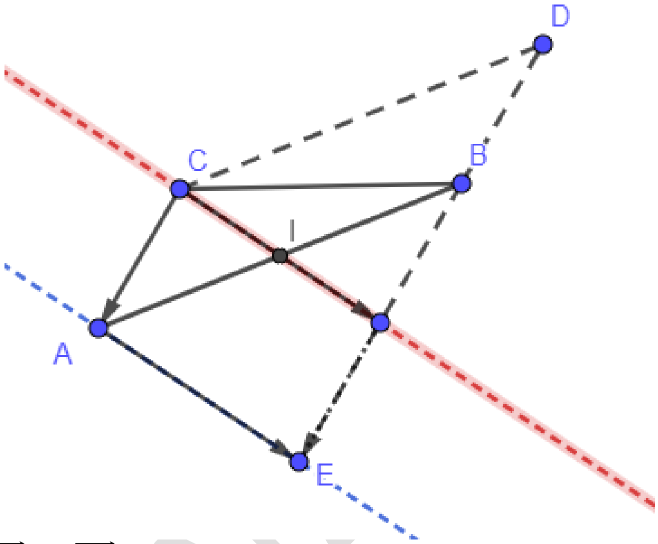
Corrigé : 1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

On en déduit que ABDC est un parallélogramme.

2) Construction des points D et E :
On a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$
Donc on peut construire les points D et E :



3) Montrons que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$

On en déduit que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires et par suite les points E, B et D sont alignés.

4)Comme I le milieu de $[AB]$ on a donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{CI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{CI}$

On en déduit que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CI}$

Donc : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont donc colinéaires

Par suite les droites (AE) et (CI) sont parallèles

Exercice13 : Soit ABCD un Parallélogramme de centre O

1) Soit A' la projection sur (DC) parallèlement à (DB)

a) Faire une figure

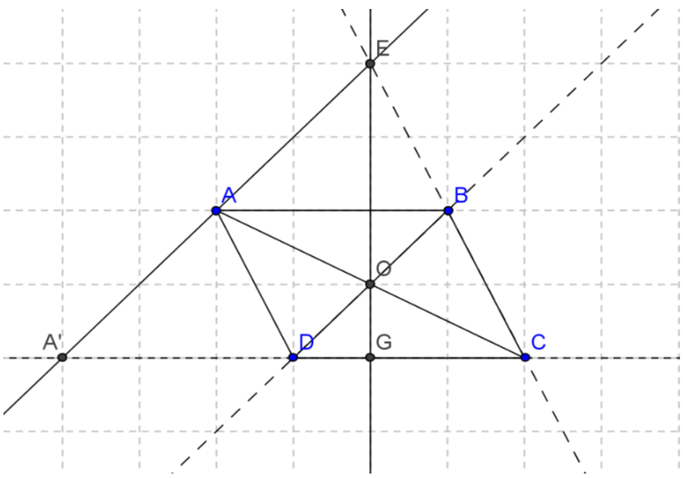
b**)** Montrer que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

2) Soit E un point de la droite (BC) tel que : A' est sa projection sur (DC) parallèlement à (DB) Montrer que A est le milieu de $[A'E]$

3) Soit R le point d'intersection des droites (OE) et (DC)

Montrer que : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ER}$

Corrigé :1) a) La figure.



1)b) A' la projection sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à : $A' \in (DC)$ et que $(AA') \parallel (DB)$

et on sait que : $(AB) \parallel (DA') = (DC)$

Donc le quadrilatère $(ABDA')$ est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'D}$

Or $(ABCD)$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par suite : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

2) A' la projection de E sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à : $A' \in (DC)$ et que $(EA') \parallel (DB)$

Et d'après le théorème de Thalès dans le triangle (ECA') on a : $\frac{CD}{CA'} = \frac{CB}{CE} = \frac{BD}{A'E}$

Or on sait que : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à :D le milieu du segment : $[A'C]$

Et par suite : $\frac{CD}{CA'} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{BD}{A'E} = \frac{1}{2}$ équivaut à dire que : $A'E = 2BD$

Et puisque on sait que : $(ABDA')$ est un parallélogramme donc : $AA' = BD$ et par suite : $A'E = 2AA'$

Et on a les points : A et A' et E sont alignés

Par conséquent : A est le milieu de $[A'E]$

3) R le point d'intersection des droites (OE) et (DC)

Dans le triangle : REA' on a : $(DO) \parallel (A'A)$ donc d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{RO}{RE} = \frac{RD}{RA'} = \frac{OD}{EA'}$ (2)

Or on sait que : $OD = \frac{1}{2}BD$ et que : $A'E = 2BD$

Donc : $OD = \frac{1}{4}EA'$ et par suite : $\frac{RO}{RE} = \frac{1}{4}$ équivaut à dire que : $RE = 4BO$

Équivaut à : $\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{RO}$

Donc : $\overrightarrow{RE} = 4\left(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{EO}\right)$

Donc : $\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{RE} + 4\overrightarrow{EO}$ équivaut à : $\overrightarrow{RE} - 4\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-3\overrightarrow{RE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-\frac{3}{4}\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{EO}$ et par suite : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ER}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien