http://www.xriadiat.com **DL1/C** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ **Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers**
- ✓ **Les vecteurs**
- ✓ **La projection**

Exercice01 : Déterminer tous les diviseurs communs à 375 et 2070

Corrigé : Méthode1 : Les diviseurs de 375 sont :
1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375
Les diviseurs de 2070 sont :
1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690, 345, 1035, 2070
Les diviseurs communs à 375 et 2070
Sont donc : 1, 3 ,5, 15.
Méthode2 : les diviseurs communs à 375 et 2070 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.
On a : $375 = 3\times 5^3$; $2070 = 2\times 3^2 \times 5 \times 23$
On applique la règle suivante pour calculer le PGCD :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (375; 2070) =3× 5=15
Et les diviseurs de 15 sont : 1, 3 ,5, 15.
Qui sont aussi les diviseurs communs de 375 et 2070

Exercice01 : Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $\overline{95x2x31x}$ Soit divisible par 3 et un nombre impair
(Déterminer tous les nombres possibles)

Corrigé : On a $0\le x\le 9$ le nombre : $\overline{95x2x31x}$ est impair donc : $x\in\{1;3;5;7;9\}$
Le nombre : $\overline{95x2x31x}$ est divisible par 3 ssi : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$ cad un multiple de 3
Donc : $20+3x=3k$
Donc : en donnant a x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que $x=5$ donc le nombre est : 95525315

Exercice01 : 1) Décomposer les deux nombres 612et 1530 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 612 et 1530
3) a) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{612}{1530}$ b) Déduire la somme suivante : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}$
4) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{612\times 1530}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Corrigé :
• On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
• On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.
1) $612=2^2\times 3^2\times 17$ et $1530=2^1\times 3^2\times 5^1\times 17$
2)a) On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (612 ;1520) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : $PGCD(1530;612)=2^1\times 3^2\times 17=306$
b) Pour calculer le PPMC des nombres 612 et 1530 on a deux méthodes :
Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance

Donc : $PPCM(612;1530)=2^2\times3^2\times5^1\times17^1=3060$

Methode2 : On a : $PGCD(612;1530)\times PPCM(612;1530)=612\times1530$

Donc : $PPCM(612;1530)=\dfrac{612\times1530}{PGCD(612;1530)}=3060$

2)a) Méthode 1 : $\dfrac{612}{1530}=\dfrac{2^2\times3^2\times17}{2^1\times3^2\times5^1\times17}=\dfrac{2}{5}$ Méthode 2 : $\dfrac{612}{1530}=\dfrac{612\div306}{1530\div306}=\dfrac{2}{5}$

<u>Remarque :</u> le $PGCD(2;5)=1$

b) Calcul de : $\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}$ Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(612;1530)=3060$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$3060\div612=5$ et $3060\div1530=2$

$\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}=\dfrac{7\times5}{612\times5}+\dfrac{3\times2}{1530\times2}=\dfrac{35}{3060}+\dfrac{6}{3060}$ Donc : $\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}=\dfrac{35+6}{3060}=\dfrac{41}{3060}$

<u>Remarque :</u> le $PGCD(41;3060)=1$ en effet : on peut utiliser Algorithme d'Euclide qui est une autre méthode pour déterminer le PGDC :

3060 = 74 × 41 + 26

41 = 1 × **26** + **15**

26 = 1 × **15** + **11**

15 = 1 × **11** + **4**

11 = 2 × **4** + **3**

4 = 1 × **3** + **1**

3 = 3 × **1** + **0**

Le **PGDC** est le dernier reste non nul : donc $PGCD(41;3060)=1$

4) $\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$

$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17=306\times\sqrt{10}$

Exercice01 : 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) Montrer que : si $n\in\mathbb{N}$ alors : n^2+n est un nombre pair et en déduire que les nombres : n et n^2 ont la même parité.

Corrigé : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou 100×101 …

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier

Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$ avec

$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) $n^2+n=n\times(n+1)$ donc : c'est un nombre pair

et par suite : n^2 et n ont la même parité.
Car si non n^2+n sera un nombre impair.

Exercice01 : Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}$
1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17
2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b
3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$
Corrigé : 1) $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^{3}-10^{2n}\times10^{1}=10^{2n}\times(10^{3}-10)$
$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$
$a=3^2\times11\times10^{2n}\times10=3^2\times11\times10^{2n+1}=11\times k$ avec $k=3^2\times10^{2n+1}$
Donc a est un multiple de 11
On a : $b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}=3\times10^{n}\times10^{1}+4\times10^{n}=10^{n}(30+4)=10^{n}\times34=10^{n}\times2\times17$

$b=17\times2\times10^{n}=17\times k$ avec : $k=2\times10^{n}$
Donc b un multiple de 17
2)Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b
On a trouvé que : $a=3^2\times11\times10^{2n+1}$ donc : $a=3^2\times11\times(2\times5)^{2n+1}$
Donc : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a
On a trouvé : $b=17\times2\times10^{n}$ donc : $b=17\times2\times10^{n}=17\times2\times(2\times5)^{n}$
Donc : $b=17\times2\times2^{n}\times5^{n}=2^{n+1}\times5^{n}\times17$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a
3) Déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$
On a : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^{n}\times17$
On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^{n}$
On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b
Donc : $a\vee b=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$
Exercice01 : 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair
2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$
a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n
Corrigé : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.
1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)
$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou 100×101 …

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :
1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier
Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2[k\times(2k+1)]=2k'$ avec
$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) a) 2023^2+2022^2 : 2022^2 est paire car le carré d'un nombre pair.
2023^2 est impair car le carré d'un nombre impair.
2023^2+2022^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.
b) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2\times k+1$ avec $k=n^2+3\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n^2+7$ est un nombre impair.
c) $2022n+4m+2021=2022n+4m+2020+1=2(1011n+2m+1010)=2k+1$
Avec : $k=1011n+2m+1010\in\mathbb{N}$.
Donc : $2022n+4m+2021$ est un nombre impair.
d)On a : $n^2+2021n+2023=n^2+n+2020n+2022+1=n(n+1)+2(1010n+1011)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+2021n+2023=2k+2(1010n+1011)+1$

Donc : $n^2+2021n+2023=2(k+1010n+1011)+1=2k'+1$ avec $k'=k+1010n+1011$

Par suite : $n^2+2021n+2023$ est un nombre impair.
e) Etude de la parité de $n^2+2024n$:
1ére cas : <u>si n pair.</u>
$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair
On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2+2024n$ est pair.
2ére cas : <u>si n impair.</u>
$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair
On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2+2024n$ est impair.

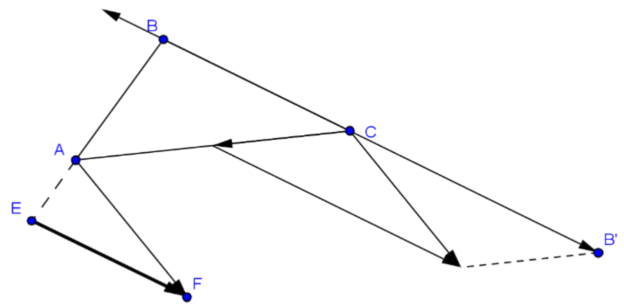
Exercice01 : Soit ABC est un triangle.
Soient les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure .

2) Montrer que : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) Que peut-on déduire ?

Corrigé : 1) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) on a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right) + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$:

C'est-à-dire $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}$ et par suite : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) On a : $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et par suite : les deux droites (EF) et (BC) sont parallèles.

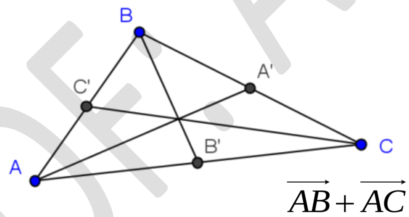
Exercice01 : Soit ABC est un triangle. Les points : A' et B' et C' sont les milieux respectivement Des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

1) Faire une figure et vérifier que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$

2) a)Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ en fonction De : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Corrigé : 1)



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'} + \vec{0}$ Car $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$

(A' est le milieu du segment $[BC]$)

Par suite : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ (1)

2) a) On a : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2)

On a : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\quad(3)$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}\quad(1)$ équivaut à: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

Donc : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice01 : ABC est un triangle.

Soient D et E deux points du plan tels que : $3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$

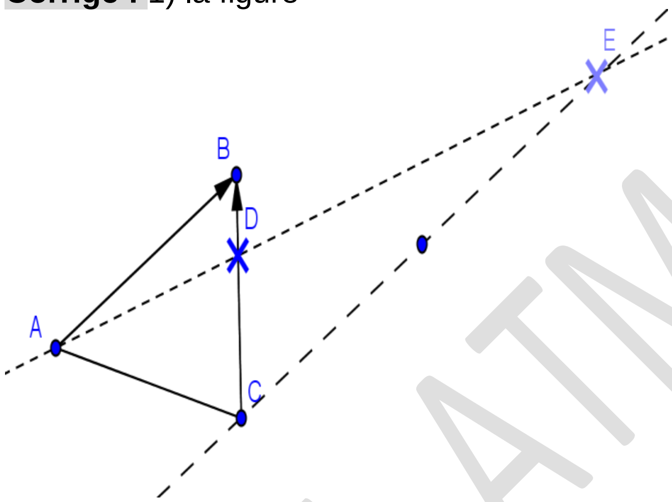
1) Faire une figure

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) b) En déduire que les points : A , E et D sont alignés.

3) Montrer que : $AD\le\frac{1}{3}(CE+AC)$

Corrigé : 1) la figure



2) a) On a: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}$

2) b) On a: $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Par suite les points : A , E et D sont alignés

3) On a: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|$$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \leq \frac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{CE}\right\|+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)$

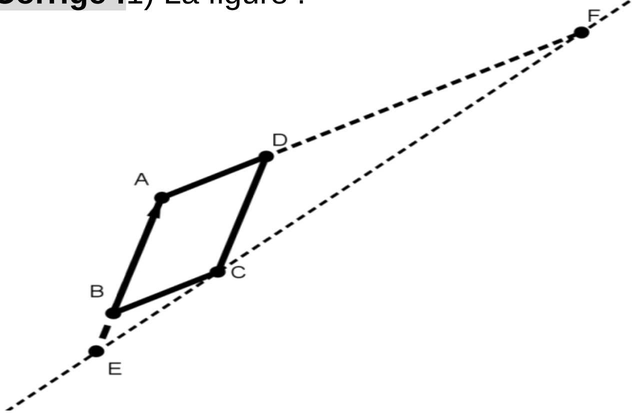
Donc : $AD \leq \frac{1}{3}(CE+AC)$

Exercice01 : Soit ABCD un parallélogramme.

E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure
2) Montrer que $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$
3) En déduire que : Les points E, F et C sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



2)On a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

Donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{AD}$

Car : $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=4\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$

3) On a : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$

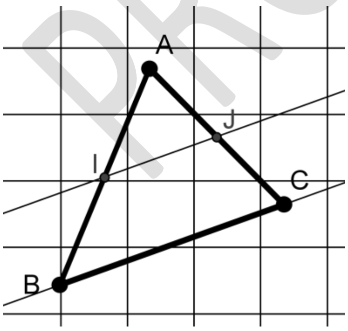
Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
D'où : les points E, F et C sont alignés

Exercice01 : Soit ABC est un triangle.

Le point I est le milieu du coté $[AB]$ et J est le milieu du coté $[AC]$

Montrer que deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Corrigé :



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AJ}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)=2\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$

Par suite les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Exercice01 : Soient ABCD un Parallélogramme de centre O

Soit E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Soit E' la projection de E sur (BC) parallèlement à (AB)

Et soit O' la projection de O sur (BC) parallèlement à (AB)

1) a) Faire une figure

b**)** Montrer que : O' est le milieu de $[BC]$

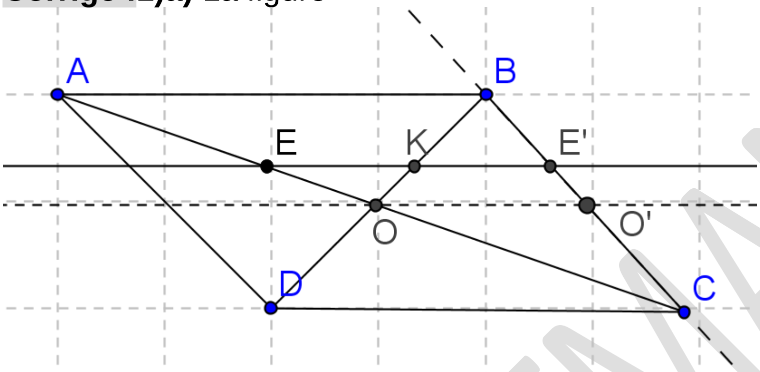
2) Montrer que : $\overrightarrow{BE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et que : $\overrightarrow{EE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) La droite (EE') coupe (BD) en K

Montrer que : $\overrightarrow{BD}=-6\overrightarrow{OK}$

Corrigé :1)a) La figure



b**)** Montrons que : O' est le milieu de $[BC]$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point C est C

Et puisque O est le milieu de $[AC]$ alors : O' est le milieu de $[BC]$ car la projection conserve le milieu

2)a) Montrons que : $\overrightarrow{BE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point E est E'

La projection du point C est C

Et puisque on a : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{BE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

b) On a : $\overrightarrow{EE'}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE'}$

Donc : $\overrightarrow{EE'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Par suite : $\overrightarrow{EE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$ donc : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ par suite : $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point E est E'

Donc : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{O'B}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

Et puisque : O' est le milieu de $[BC]$ alors : $\overrightarrow{O'B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ Par suite : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) Montrons que : $\overrightarrow{BD}=-6\overrightarrow{OK}$

On considère la projection sur (BO) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point O' est O

La projection du point E' est K

La projection du point B est B

Et puisque : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité

Alors : $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$ et par suite : $\overrightarrow{DB}=6\overrightarrow{OK}$

Et par conséquent : $\overrightarrow{BD}=-6\overrightarrow{OK}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien