http://www.xriadiat.com **DL1: A** **PROF: ATMANI NAJIB**

Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes :

- ✓ Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers
- ✓ Les vecteurs
- ✓ La projection

Exercice01 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : ∈ ; ∉; ⊂; ⊄

$-4\ldots\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}\ldots\mathbb{N}$; $\sqrt{2}\ldots\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}\ldots\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}\ldots\mathbb{N}$; $12-32\ldots\mathbb{N}$; $\sqrt{25}\ldots\mathbb{N}$; $2,12\ldots\mathbb{N}$; $0\ldots\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}\ldots\mathbb{N}$

$\pi\ldots\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}\ldots\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}\ldots\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*\ldots\mathbb{N}$; $\{0\}\ldots\mathbb{N}$; $10\ldots\{1;8;9;11;12\}$; $5\ldots\emptyset$

Corrigé : $-4 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$; $-\frac{15}{3} \notin \mathbb{N}$; $12-32 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; $2,12 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$;

$\frac{\sqrt{100}}{2} \in \mathbb{N}$; $\pi \notin \mathbb{N}$; $\{1;2;7\} \subset \mathbb{N}$; $\{4;-2;12\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; $\{0\} \subset \mathbb{N}$; $10 \notin \{1;8;9;11;12\}$; $5 \notin \emptyset$

Exercice02 : Déterminer les chiffre x et y pour que :

1) Le nombre : $M = 95x2x31x$ soit divisible par 3 et aussi un nombre impair. (Déterminer tous les nombres possibles)

2) Le nombre : $N = 12x34y6$ soit multiple de 4 et de 9 (Déterminer tous les nombres possibles)

Corrigé : 1) On a : $0 \le x \le 9$.

Le nombre : $M = 95x2x31x$ est impair

Donc : $x \in \{1;3;5;7;9\}$

Le nombre : M est divisible par 3

Equivaut à : $9+5+x+2+x+3+1+x = 3k$; $k \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire : $20+3x$ un multiple de 3

En donnant à x les valeurs $1;3;5;7;9$.

On trouve que : $x=5$ (seul vérifie).

Par suite le nombre est : 95525315.

2) On a : $x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

et $y \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Le nombre : $N = 12x34y6$ est multiple de : 4

Signifie que : le nombre $y6$ est un multiple de 4.

Donc : $y \in \{1;3;5;7;9\}$.

Le nombre : $N = 12x34y6$ est multiple de : 9

Signifie : $1+2+x+3+4+y+6 = 16+x+y$

est un multiple de 9

Si $y=1$ alors $x=1$ et $16+x+y=18$

Si $y=3$ alors $x=8$ et $16+x+y=27$.

Si $y=5$ alors $x=6$ et $16+x+y=27$

Si $y=7$ alors $x=4$ et $16+x+y=27$

Si $y=9$ alors $x=2$ et $16+x+y=27$

D'où les couples $(x;y)$ solutions sont : $(1;1);(8;3);(6;5);(4;7);(2;9)$.

Par suite les nombres possibles sont :

1213416 ; 1283436; 1263456; 1243476; 1223496

Exercice03 : Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (Autres que m) est égale à n et simultanément la Somme des diviseurs de n (autres que n) Est égale à m.

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 220 et 284.
2) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

Corrigé :1) $220=2^2\times5\times11$ et $284=2^2\times71$.

2)Les diviseurs de 220 sont : 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 ;220.
Les diviseurs de 284 sont 1;2;4;71;142;284
Calculons la somme des diviseurs de 220 sauf 220 :$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$
Et Calculons la somme des diviseurs de 284
Sauf 284 est: $1+2+4+71+142=220$
Conclusion : 220 et 284 sont deux entiers amicaux

Exercice04 : $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$;

1) Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.
2) Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair
3) Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Corrigé : 1) On a : a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a=2k$
b Impair alors il existe $k'\in\mathbb{N}$: $b=2k'+1$
Donc : $a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$
Par suite : $a+b$ est un nombre impair
2) a est impair donc : $a=2k+1$avec $k\in\mathbb{N}$
$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times2k\times1+1^2=4k^2+4k+1$
Donc : $a^2=2(2k^2+2k)+1=2k''+1$; $k^2+2k=k''\in\mathbb{N}$
Par suite : a^2 est un nombre impair
3) On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair
Donc : contradiction et par suite : a est un nombre impair (Raisonnement par l'absurde)

Exercice05 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$

1) $2n+16$ 2) $10n+5$ 3) $n^2+11n+17$ 4) $n^2+7n+20$
5) n^2+5n 6) n^2+8n 7) n^3-n 8) $5n^2+n$

Corrigé : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2*k*, avec *k* entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2*k*+1, avec *k* entier.

1) $2n+16=2(n+8)=2\times k$ avec $k=n+8\in\mathbb{N}$
Et par suite : $2n+16$ est un nombre pair.
2) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$
Avec $k=5n+2\in\mathbb{N}$
Par suite : $10n+5$ est un nombre impair.
3) On a : $n^2+11n+17=n^2+n+10n+16+1$ $n^2+11n+17=n(n+1)+2(5n+8)+1$
Et on a : $n(n+1)$est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
Donc : il existe un entier naturel k tel que :
$n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$
Donc : $n^2+11n+17=2k+2(5n+8)+1$
Donc : $n^2+11n+17=2(k+5n+8)+1=2k'+1$
Avec $k'=k+5n+8$
Par suite : $n^2+11n+17$ est un nombre impair.
4) On a: $n^2+7n+20=n^2+n+6n+20=n(n+1)+2(3n+10)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

$n^2+7n+20=2k+2(3n+10)=2(k+3n+10)=2k'$ Avec $k'=k+3n+10$

Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair.

5) Etude de la parité de n^2+5n : $n^2+5n=n^2+n+4n=n(n+1)+4n$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs

Donc : c'est un nombre pair.

Donc : $n^2+5n=2k+4n=2(k+2n)=2k'$ avec $k'=k+2n\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2+5n est un nombre pair.

6) Etude de la parité de n^2+8n :

1ére cas : si n pair.

$n^2=n\times n$ est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $8n=2\times 4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme de deux nombres pairs donc : n^2+8n est pair.

2ére cas : si n impair.

$n^2=n\times n$ est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $8n=2\times 4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme d'un nombre impair

Et un nombre pair donc : n^2+8n est impair.

7) Etude de la parité de : n^3-n ; $n\in\mathbb{N}$

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n^2-1^2)=n(n-1)(n+1)$.

Donc : $n^3-n=(n-1)\times n\times(n+1)$ est le produit de trois nombres consécutifs ($n\times(n+1)$ est pair)

Donc : n^3-n est un nombre pair.

8) Etude de la parité de $5n^2+n$ $n\in\mathbb{N}$:

$5n^2+n=4n^2+n^2+n=4n^2+n(n+1)=2\times 2n^2+2k$ $5n^2+n=4n^2+n^2+n=2\times(2n^2+k)=2\times k'$

Avec : $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $5n^2+n$ est un nombre pair.

Exercice06 : Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.

Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.

b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.

c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

Corrigé : 1) Puisque $454 = 33\times13+25$
Et $375 = 33\times11+12$, il faut un peu plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de 11 carreaux en largeur. Donc : un nombre de carreaux non coupés égal à : $11\times13 = 143$
2)a) Les diviseurs de 455 sont :1 , 5 , 7, 13 , 35 , 65 , 91 et 455.
Les diviseurs de 385 sont : 1 , 5 , 7 , 11 , 55 ,77 et 385
b) L'ensemble des diviseurs communs à 455 et 385 sont donc : 1, 5 et 7.
c) On peut donc utiliser des dalles de côté 7 cm pour carreler la cuisine.
Il en faudra 65 en longueur et 55 en largeur.
3) a) La liste des multiples de 24 inférieurs à 400 est :
24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,312
336,360 et 384.
La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 est:
15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,165,180,195,210,225,240,255,270,285,300,315,330,345,360 et 375
b) La liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400 est donc 120,240 et 360.
c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de 360 cm (soit 3m 60) de côté avec des carreaux de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Exercice07 : Soient : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ et on pose : $N=(n+4m)^2-n^2$
Montrer que : N est un entier naturel divisible par 8

Corrigé :1) $N=(n+4m)^2-n^2=(n+4m+n)(n+4m-n)=8m(n+2m)$
Puisque : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ alors : $8m(n+2m)\in\mathbb{N}$
Et par suite : $N\in\mathbb{N}$
Et on a : $N=8m(n+2m)=8k$ avec : $k=m(n+2m)\in\mathbb{N}$
Par suite : N est un entier naturel divisible par 8

Exercice08 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$
1) Montrer que : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs.
2) Montrer que : le nombre n^4-n^2+16 est un multiple de 4

Corrigé :1) a) on a :
$n^2+3n+4=n^2+n+2n+4=n(n+1)+2(n+2)$
Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair
$2(n+2)=2k$ Avec $k=n+2\in\mathbb{N}$ est aussi pair
Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)+2(n+2)$ est pair car c'est la somme deux nombres pairs
b) On a : $n^2-3n+4=n^2+n-4n+4=n(n+1)-2(2n-2)$
On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair
$2(2n-2)=2k$ Avec $k=2n-2\in\mathbb{N}$ est aussi pair.
Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)-2(n-2)$ est pair car c'est la différence de deux nombres pairs.
2) ***<u>1ere méthode</u>*** : On a : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs
Donc : $n^2+3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2k'$
Avec : $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$
Par suite : $(n^2+3n+4)(n^2-3n+4)=(2k)(2k')=4kk'$
Équivaut à : $((n^2+4)+3n)((n^2+4)-3n)=4kk'$
Équivaut à : $(n^2+4)^2-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4+8n^2+16-9n^2=4kk'$
Équivaut à : $n^4-n^2+16=4kk'=4k''$
Avec : $k''=kk'\in\mathbb{N}$
Équivaut à dire que n^4-n^2+16 est un multiple de 4.
2ere méthode : On a : $n^4-n^2+16=n^2\left(n^2-1\right)+16=n^2\left(n^2-1^2\right)+16$

$n^4-n^2+16=n^2\left(n-1\right)\left(n+1\right)+16=\left(n-1\right)n\times n\times\left(n+1\right)+16$

Or : on a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n\left(n+1\right)$ est un nombre pair

Et aussi : $\left(n-1\right)\times n$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n\left(n+1\right)$ est un nombre pair.

$n^4-n^2+16=2k\times 2k'+16=4kk'+16=4\left(kk'+4\right)=4k''$ Avec : $k''=kk'+4\in\mathbb{N}$

Par suite : n^4-n^2+16 est un multiple de 4
Exercice09 : Soit n est un nombre entier naturel impair
1) Vérifier que : n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4
3) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 8
4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16
5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8
Corrigé :**1)** si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8
Si $n=3$ alors : $3^2-1=8$ est un multiple de 8
Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8
Si $n=7$ alors : $7^2-1=48$ est un multiple de 8
2) n *est impair* donc : $n=2k+1$.
Donc : $n^2-1=\left(2k+1\right)^2-1=\left(2k\right)^2+2\times 2k\times 1+\left(1\right)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4\left(k^2+k\right)=4\times k'$ *Avec* $k'=k^2+k\in\mathbb{N}$
Donc : n^2-1 est un multiple de 4.
3) On a trouvé : $n^2-1=4k\left(k+1\right)$

Or $k\left(k+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $k\left(k+1\right)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2-1=8k'$ et par suite : n^2-1 est un multiple de 8.
4) $n^4-1=\left(n^2\right)^2-1^2=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$.

Et on a trouvé que : $n^2-1=4k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$.
Et on a : $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2$
$n^2+1=4\left(k^2+k+1\right)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=\left(4k'\right)\left(4k''\right)=16k'''$ avec : $k'''=k'k''\in\mathbb{N}$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16.
5) On a trouvé que : n^2-1 est un multiple de 8
Donc : $n^2-1=8k$ c'est-à-dire : $n^2=8k+1$
De même on a : m^2-1 est un multiple de 8
Donc : $m^2-1=8k'$ c'est-à-dire : $m^2=8k'+1$
$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8$
$n^2+m^2+6=8\left(k+k'+1\right)=8k''$ Avec : $k''=k+k'+1\in\mathbb{N}$

Par conséquent : n^2+m^2+6 est un multiple de 8.

Exercice10 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse .
0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ;1004001 et 259

Corrigé : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont : 1 et lui-même.
1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0
17 est premier car admet exactement deux diviseurs
21 n'est pas premier car 3 divise 21 ($21=7\times3$)
41 est premier car admet exactement deux diviseurs
87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87=29\times3$)
105 n'est pas premier car 5 divise 105 ($105=5\times21$)
Question : Est-ce que 239 est premier ?
On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »
Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier
2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787
3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle :
On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$ Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191.
Par conséquent : 191 est premier
1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001
259 n'est pas premier car $259=7\times37$
C'est à dire 7 divise 259.

Exercice11 : Soit n un entier naturel :
1) Factoriser le nombre : n^3+1
2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Corrigé : 1) On a : $n^3+m^3=(n+m)(n^2-n\times m+m^2)$
Donc : $n^3+1=n^3+1^3=(n+1)(n^2-n+1)$
2) $27000000001=27\times10^9+1=3^3\times10^9+1=3^3\times10^9+1=(3\times10^3)^3+1=(3\times10^3+1)\left((3\times10^3)^2-3\times10^3+1\right)$
Donc : $27000000001=3001(3000^2-3000+1)=3001\times8997001$
Donc : le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier car il admet plus que de deux diviseurs qui sont : 3001 et 8997001

Exercice12 : On pose : $a=540000$
1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier a
2) Déterminer le plus petit entier naturel non nul qu'il faut multiplier par a pour trouver un carré parfait
Rappel : On dit qu'un entier naturel *n* est un carré parfait, s'il existe *m* dans $\mathbb{N}$ tel que : $n=m^2$.

Corrigé : 1) $540000=2^5\times3^3\times5^4$
2) Pour que a soit un carré d'un entier il faut que tous les exposants des nombres premiers dans sa décomposition soit pair.
$2^5\times3^3\times5^4\times2\times3=2^6\times3^4\times5^4$
$=(2^3\times3^2\times5^2)^2=(1800)^2$
Donc : on doit multiplier a par : $2\times3=6$

540000 |2
270000 |2
135000 |2
67500 |2
33750 |2
16875 |3
5625 |3
1875 |3
625 |5
125 |5
25 |5
5 |5
1 |

La décomposition est terminée :
540000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 x 5 x 5 x 5 x 5
$540000=2^5\times3^3\times5^4$

Exercice13 : 1) Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants et préciser quand il s'agit d'un nombre premier : 104 ; 3196 ; 1156 ; 863 et 189.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 3196 et 1156
3)Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 104 pour obtenir un carré parfait ?
4) Rendre la fraction $\frac{3196}{1156}$ irréductible
5) Calculer $\frac{41}{3196}+\frac{21}{1156}$

Corrigé :1) Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants et préciser quand il s'agit d'un nombre premier
a)$104=2\times52=2\times3\times26=2\times2\times2\times13=2^3\times13$
b)$3196=2\times1598=2\times2\times799=2\times2\times17\times47=2^2\times17\times47$
c)$1156=2\times578=2\times2\times289=2\times2\times17\times17=2^2\times17^2$
d)863 Est un nombre premier en effet :
• On détermine tous les nombres premiers p vérifiant $p^2\le863$.
Les nombres sont : 2 ;3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ;29
• 863 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est premier
e) $189=3\times63=3\times3\times21=3\times3\times3\times7=2^3\times7$
2) Déduction du : PGCD et du PPMC des nombres 3196 et 1156 :
$3196=2^2\times17\times47$ et $1156=2^2\times17^2$
On fait le produit des facteurs premiers apparaissant dans les deux décompositions, affectés de leur plus petit exposant donc : $PGCD(3196;1156)=2^2\times17=68$
Il y'a plusieurs méthodes pour calculer le : $PPCM(3196;1156)$
Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs
Premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance
Donc : $PPCM(3196;1156)=2^2\times17^2\times47=54332$
Methode2 : On a : $PGCD(3196;1156)\times PPCM(3196;1156)=3196\times1156$
Donc : $PPCM(3196;1156)=\frac{3196\times1156}{PGCD(3196;1156)}$
Donc : $PPCM(3196;1156)=\frac{3196\times1156}{68}=54332$
3) Pour obtenir un carré parfait il faut que la décomposition ne contienne que des facteurs qui ont des exposants pairs ; On a : $104=2^{\boxed{3}}\times13^{\boxed{1}}$
Il faut donc multiplier par : $2\times13=26$ et le carré parfait obtenu est 2704
4) Pour rendre la fraction $\frac{3196}{1156}$ irréductible on doit diviser le numérateur et le dénominateur par leur $PGCD=68$
$\frac{3196}{1156}=\frac{3196\div68}{1156\div68}=\frac{47}{17}$
5) Calcul de : $\frac{41}{3196}+\frac{21}{1156}$
Il faut mettre les fractions au même dénominateur :
Le $PPCM(3196;1156)$est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :
$\frac{41}{3196}+\frac{21}{1156}=\frac{41\times17}{3196\times17}+\frac{21\times47}{1156\times47}=\frac{697}{54332}+\frac{987}{54332}=\frac{697+987}{54332}=\frac{1984}{54332}=\frac{1984\div4}{54332\div4}=\frac{421}{13583}$

Exercice14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $F = \frac{n+9}{n-6}$

1) Montrer que : $F = 1 + \frac{15}{n-6}$ pour $n \neq 6$

2) En déduire les valeurs de n tel que : F soit un entier naturel

Corrigé : 1) Pour $n \neq 6$ on a : $1 + \frac{15}{n-6} = \frac{n-6+15}{n-6} = \frac{n+9}{n-6}$ Donc: $1 + \frac{15}{n-6} = F$

2) $F \in \mathbb{N}$ Équivaut à : $1 + \frac{15}{n-6} \in \mathbb{N}$

Équivaut à : $\frac{15}{n-6} \in \mathbb{N}$

Équivaut à : $n-6$ divise 15

Équivaut à : $n-6=1$ ou $n-6=3$ ou $n-6=5$ ou $n-6=15$

Équivaut à : $n=7$ ou $n=9$ ou $n=11$ ou $n=21$

Donc : F est un entier naturel si et seulement si : $n=7$ ou $n=9$ ou $n=11$ ou $n=21$

Exercice15 : Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = 10^{2n+3} - 10^{2n+1}$; $b = 3 \times 10^{n+1} + 4 \times 10^{n}$

1) Montrer que : *a* est un multiple de 11 et que b un multiple de 17

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b

3) En déduire $a \wedge b$ et $a \vee b$

Corrigé : 1) $a = 10^{2n+3} - 10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10^{3} - 10^{2n} \times 10^{1}$

$a = 10^{2n} \times \left(10^{3} - 10\right)$

$a = 10^{2n} \times (990) = 10^{2n} \times 99 \times 10 = 3 \times 33 \times 10^{2n} \times 10k$

$a = 3^{2} \times 11 \times 10^{2n} \times 10 = 3^{2} \times 11 \times 10^{2n+1} = 11 \times k$

Avec $k = 3^{2} \times 10^{2n+1}$

Donc *a* est un multiple de 11

On a : $b = 3 \times 10^{n+1} + 4 \times 10^{n} = 3 \times 10^{n} \times 10^{1} + 4 \times 10^{n}$

$b = 3 \times 10^{n} \times 10^{1} + 4 \times 10^{n} = 10^{n}(30+4) = 10^{n} \times 34$

$b = 17 \times 2 \times 10^{n} = 17 \times k$ Avec : $k = 2 \times 10^{n}$

Par suite : b un multiple de 17

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres *a* et b :

On a trouvé que : $a = 3^{2} \times 11 \times 10^{2n+1}$

C'est-à-dire : $a = 3^{2} \times 11 \times (2 \times 5)^{2n+1}$

C'est-à-dire : $\boxed{a = 2^{2n+1} \times 3^{2} \times 5^{2n+1} \times 11}$ et c'est la décomposition en produit de facteurs premiers de *a*

On a trouvé : $b = 17 \times 2 \times 10^{n}$ donc : $b = 17 \times 2 \times 10^{n} = 17 \times 2 \times (2 \times 5)^{n} = 17 \times 2 \times 2^{n} \times 5^{n}$

Par suite : $\boxed{b = 2^{n+1} \times 5^{n} \times 17}$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de *a*

3) En déduction de : $a \wedge b$ et $a \vee b$

On a : $a = 2^{2n+1} \times 3^{2} \times 5^{2n+1} \times 11$ et $b = 2^{n+1} \times 5^{n} \times 17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de : *a* et b

Donc : $a \wedge b = 2^{n+1} \times 5^{n}$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de : *a* et b

Donc : $a \vee b = 2^{2n+1} \times 3^{2} \times 5^{2n+1} \times 17 \times 11 = 2^{2n+1} \times 5^{2n+1} \times 693$

Exercice16 : 1) a) Déterminer tous les diviseurs de 22

b) En déduire tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$(x+2)(y+1)=22 \quad (1)$

2) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$x+xy+y=30 \quad (2)$

Corrigé : 1) a) On a : $22=2^1\times 11^1$ donc les diviseurs
De 22 sont : 1 et 2 et 11 et 22

b) On a : $(x+2)(y+1)=22 \ (1)$

Donc : $\begin{cases} x+2=22 \\ y+1=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=11 \\ y+1=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=2 \\ y+1=11 \end{cases}$ ou ($\begin{cases} x+2=1 \\ y+1=22 \end{cases}$ impossible car $x\in\mathbb{N}$)

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(20;0)$; $(9;1)$ et $(0;10)$

2) $x+xy+y=30$ équivaut à **:** $x+xy+y+1=31$

Équivaut à : $x(1+y)+(y+1)=31$ Équivaut à : $(y+1)(x+1)=31$

Donc : $(x+1)$ et $(y+1)$ sont deux diviseurs de 31

Par suite : $\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=31 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+1=31 \\ y+1=1 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=30 \\ y=0 \end{cases}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (2)

Sont : $(0;30)$ et $(30;0)$.

Exercice17 : Soit ABC est un triangle.

1) Soit le vecteur : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) Soit le vecteur : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

a) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires sachant que : $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

Corrigé :1) On a : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Par suite : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) a) On a : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) b) $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-3\left(-3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{w}=-6\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-6\vec{v}$

Par suite : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

Exercice18 : Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

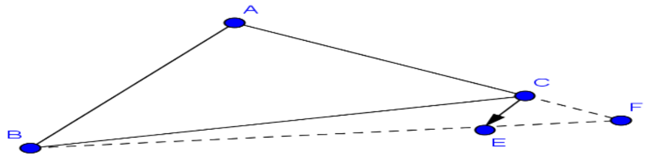
1) Faire une figure

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4) En déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé :1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

$\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ Donc $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires
D'où : Les points E, F et B sont alignés

Exercice19 : Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Corrigé :1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? D'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ)

Sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires
Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Exercice20 : Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

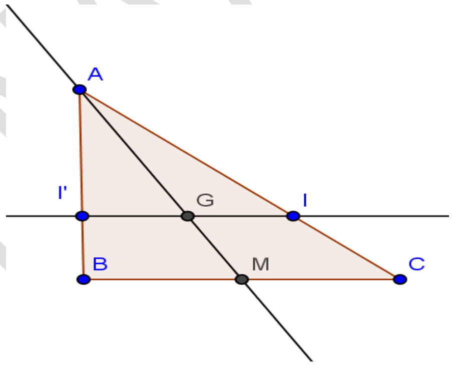
1) Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) Soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Corrigé : 1) On a $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$ c'est-à-dire : $AI=\frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC}=\frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI'}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$ c'est-à-dire : $AI'=\frac{2}{3}AB$ par suite : $\frac{AI'}{AB}=\frac{2}{3}$ ②



D'après ①et② on a $\frac{AI}{AC}=\frac{AI'}{AB}$ et d'après la réciproque de Thales : $(II')\parallel(BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu de [BC]

Montrons que : : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM)

Parallèlement à (BC)

On a $A\in(AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$ ❶

La parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle coupe (AM) en M donc $P(C)=M$ ❷

La parallèle à (BC) passant par I est-elle coupe (AM) en G donc $P(I)=G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹donc D'après ❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien