Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

La parité des nombres

- $4n+300$

$4n+300 = 2\times 2n + 2\times 150 = 2(2n+150)$

Donc le nombre $4n+300$ est un nombre pair

- $14n+111$

$14n+111 = 2\times 7n + 2\times 55 + 1 = 2(7n+55)+1$

Donc le nombre $14n+111$ est un nombre impair.

- $2^{n+1}+15$

$2^{n+1}+15 = 2\times 2^n + 2\times 7 + 1 = 2(2^n+7)+1$

Donc le nombre $2^{n+1}+15$ est un nombre impair

- n^2+5n+3

Première méthode :

1er cas : Si n est impair alors $n = 2k+1 (k\in\mathbb{N})$

Donc

$A = n^2+5n+3$

$= (2k+1)^2 + 5(2k+1) + 3 = 4k^2+4k+1+10k+5+3$

$= 4k^2+14k+8+1 = 2\times(2k^2+7k+4)+1$

Alors le nombre n^2+5n+3 est un nombre impair

2 éme cas si n est pair alors $n = 2k (k\in\mathbb{N})$

Donc

$A = n^2+5n+3$

$= (2k)^2 + 5\times 2k + 3 = 4k^2+10k+3$

$= 4k^2+10k+2+1 == 2\times(2k^2+5k+1)+1$

Alors le nombre n^2+5n+3 est un nombre impair

Par conséquent n^2+5n+3 est toujours impair.

Dzeuxieme méthode

$n^2+5n+3 = n^2+n+4n+3 = n(n+1)+4n+3$

Or $n(n+1)$ est pair et 4n+3 impair donc n^2+5n+3 est impair.

- $n(n+1)(n^2+5n+3)$

On a $n(n+1)$ est toujours un nombre pair (produit de deux nombres entiers naturels consécutifs) et n^2+5n+3 est un nombre impair

Alors $n(n+1)(n^2+5n+3)$ est un nombre pair.

Exercice 02

Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $a = 2n+4$ et $b = 6n+11$

1) La parité de a et b

On a $a = 2n+4 = 2(n+2)$

Donc a est un nombre pair.

Et on a $b = 6n+11 = 6n+10+1 = 2(3n+5)+1$

Donc b est un nombre impair.

2) Simplifier le nombre $(6n+11)(-1)^{2n+4} - (2n+4)(-1)^{6n+11}$

On a $(-1)^{2n+4} = 1$ car $2n+4$ est un nombre pair et

$(-1)^{6n+11} = -1$ car $6n+11$ est un nombre impair

Donc $A = 6n+11-(2n+4)(-1) = 8n+15$

3. Montrer que $a^2+(b+1)^2$ est un multiple de 20

$$A = a^2+(b+1)^2 = (2n+4)^2 + (6n+11+1)^2$$

On a
$$= 4n^2+16n+16+36n^2+144n+144$$
$$= 40n^2+160n+160$$
$$= 20\times(2n^2+8n+8)$$

Donc $a^2+(b+1)^2$ est un multiple de 20

Exercice 03

Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $a = 2^{n+3} - 5\times 2^n$ et $b = 7^{n+1}\times 2^{n+3}$

➔ Montrer que a est multiple de 3

On a

$a = 2^{n+3} - 5\times 2^n = 2^n\times 2^3 - 5\times 2^n = (2^3-5)\times 2^n = 3\times 2^n$

Donc a est multiple de 3

➔ Montrer que 56 divise b c'est-à-dire montrer que b est un multiple de 56

On a $b = 7^{n+1}\times 2^{n+3} = 7^n\times 7\times 2^n\times 2^3 = 56\times 14^n$

Donc 56 divise b .

Exercice 04

1) Déterminer a pour que le nombre $5a74$ divisible par 3

On a $5+a+7+4 = 16+a$

Donc $a = \{2;5;8\}$

2) Déterminer b pour que le nombre $815b$ divisible à la fois par 2 et 9

On a $8+1+5+b = 14+b$

Donc $b = 4$

3) Déterminer c pour que 921c divisible par 3 et non pas par 9.

On a $921c = 9+2+1+c = 12+c$

Donc $c = \{0;3;9\}$

Exercice 05

Les nombres premiers dans la liste sont 101 et 137

Car ils possèdent deux diviseurs.

Exercice 06

Soit n un nombre **impair**

1) La parité de n^2-1 et n^2+1

Le n un nombre impair alors $n = 2k+1 (k\in\mathbb{N})$

On a

$n^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2+4k+1-1 = 2(2k^2+2k)$

Donc le nombre n^2-1 est un nombre pair.

Et on a

$n^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k^2+4k+1+1 = 2(2k^2+2k+1)$

Donc n^2+1 est un nombre pair.

2) Montrer que 8 divise n^2-1

On a $n^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est un produit de deux nombres entiers naturels consécutifs alors $k(k+1)$ est un nombre pair

Donc $k(k+1) = 2K' \ (K'\in\mathbb{N})$

D'où $n^2-1 = 4k(k+1) = 4\times 2K' = 8K'$

Par conséquent 8 divise n^2-1

3) Déduire que 16 divise n^4-1

On a $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$

D'après les questions 1) et 2) on a

n^2+1 est un nombre pair ; c-à-d $n^2+1=2K''$ $(K''\in\mathbb{N})$

Et d'après la question 2) on a

$n^2-1=4k(k+1)=4\times2K'=8K'$

Alors $n^4-1=8K'\times2K''=16K'\times K''$

Par conséquent 16 divise n^4-1

Exercice 07

1) Vérifier que $n^2+4n+9=(n+3)(n+1)+6$

On a $(n+3)(n+1)+6=n^2+n+3n+3+6=n^2+4n+9$

2) Déterminer tous les valeurs de l'entier naturel n pour que le nombre $n+3$ divise n^2+4n+9

On a $n^2+4n+9=(n+3)(n+1)+6$

Alors $\frac{n^2+4n+9}{n+3}=\frac{(n+3)(n+1)}{n+3}+\frac{6}{n+3}=n+1+\frac{6}{n+3}$

Donc pour que le nombre $n+3$ divise n^2+4n+9 il faut que $n+3$ divise 6

On a $D_6=\{1;2;3;6\}$

Donc $n+3=1$ ou $n+3=2$ ou $n+3=3$ ou $n+3=6$

Par conséquent $n=0$ ou $n=3$

Exercice 08

Soient n et m deux nombres entiers naturels

1) Montrer que $m+n$ et $m-n$ ont même parité

On a $m+n+m-n=2m$

Donc $m+n+m-n$ est un nombre pair

Et on a $m+n-(m-n)=2n$

Donc $m+n-(m-n)$ est un nombre pair

Donc $m+n$ et $m-n$ ont même parité

2) Déterminer tous les valeurs de n et m tels que $m^2-n^2=12$

On a $m^2-n^2=12$ alors $(m-n)(m+n)=12$

Donc $m+n$ et $m-n$ sont des diviseurs de 12

Par conséquent :

$\begin{cases} m+n=6 \\ m-n=2 \end{cases}$ (même parité)

D'où $m=4$ et $n=2$

Exercice 09

1) Les diviseurs de 22 sont $D_{22}=\{1;2;11;22\}$

2) Déduire les entiers naturels tels que $(x+2)(y+1)=22$

3) On a $(x+2)(y+1)=22$ Donc $x+2$ et $y+1$ sont des diviseurs de 22

Alors $\begin{cases} x+2=2 \\ y+1=11 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=11 \\ y+1=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=22 \\ y+1=1 \end{cases}$

D'où $(x;y)=\{(0;10);(9;1);(20;0)\}$

Exercice 10 :

1) La décomposition en produit de facteurs premiers

$495=3^2\times5\times11$; $156=2^2\times3\times13$; $1404=2^2\times3^3\times13$

$4056=2^3\times3\times13^2$

2) Simplification

$\frac{1404}{4056}=\frac{2^2\times3^3\times13}{2^3\times3\times13^2}=\frac{3^2}{2\times13}=\frac{9}{26}$

$\sqrt{1404\times4056}=\sqrt{2^2\times3^3\times13\times2^3\times3\times13^2}=468\sqrt{26}$

De même pour $\frac{495}{1404}+\frac{156}{4056}$

3) $p\gcd(495;156)=3$; $p\gcd(495;1404)=3^2=9$

$p\gcd(1404;4056)=2^2\times3\times13=156$

$ppcm(495;156)=2^2\times3^2\times5\times11\times13$;

$ppcm(495;1404)=2^2\times3^3\times5\times11\times13$;

$ppcm(1404;4056)=2^3\times3^3\times13^2$

Exercice 11 :

1) La décomposition en produit de facteurs premiers :

$a=4680=2^3\times3^2\times5\times13$; $b=5940=2^2\times3^3\times5\times11$

2) La décomposition de $a^2\times b^3$

$a^2\times b^3=(2^3\times3^2\times5\times13)^2\times(2^2\times3^3\times5\times11)^3$

$=2^{12}\times3^{13}\times5^5\times11^3\times13^2$

3) $ppcm(a;b)=2^3\times3^3\times5\times11\times13$

$p\gcd(a;b)=2^2\times3^2\times5$

Et on a

$p\gcd(a;b)\times ppcm(a;b)=2^2\times3^2\times5\times2^3\times3^3\times5\times11\times13$

$=2^5\times3^5\times5^2\times11\times13$

Et $a\times b=2^3\times3^2\times5\times13\times2^2\times3^3\times5\times11$

$=2^5\times3^5\times5^2\times11\times13$

Donc $p\gcd(a;b)\times ppcm(a;b)=a\times b$

4) Déterminer le plus petit naturel m pour que ma soit un carré parfait

$ma=m\times2^3\times3^2\times5\times13$

Donc $m=2\times5\times13=130$

5) Déterminer le plus petit naturel n pour que nb soit un cube d'un entier naturel

$nb=n\times2^2\times3^3\times5\times11$

Donc $n=2\times5^2\times11^2=50\times121=6050$

6) Evident

Exercice 12

$x=7^{n+2}-7^n$; $y=3\times7^{n+1}+5\times7^n$

1) Montrer que x est divisible par 3 et y est un multiple de 13

On a $x=7^{n+2}-7^n=7^n(7^2-1)=48\times7^n=3\times(16\times7^n)$

Donc x est divisible par 3

$y=y=3\times7^{n+1}+5\times7^n=7^n(3\times7+5)=26\times7^n=13\times(2\times7^n)$

donc y est un multiple de 13

2) Décomposition en produit de facteurs premiers

$x=7^{n+2}-7^n=7^n(7^2-1)=48\times7^n=2^4\times3\times7^n$

$y=y=3\times7^{n+1}+5\times7^n=7^n(3\times7+5)=26\times7^n=2\times13\times7^n$

3) $p\gcd(x;y)=2\times7^n$; $ppcm(x;y)=2^4\times3\times13\times7^n$

Exercice 13

1) Développement $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1$

2) On a $2n+1$ est un nombre impair et $(n+1)^2 - n^2$ est une différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs

Alors tout entier naturel impair peut s'écrire comme une différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs

3) Application

On a $2017 = 2\times 1008 + 1$ donc $n = 1008$

D'où $2017 = (1008+1)^2 - 1008^2 = 1009^2 - 1008^2$

4) Evident

prof: ATMANI NAJIB